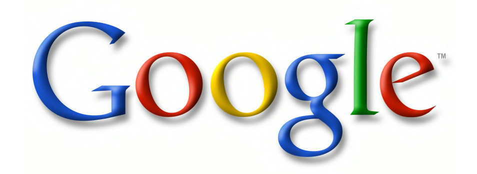
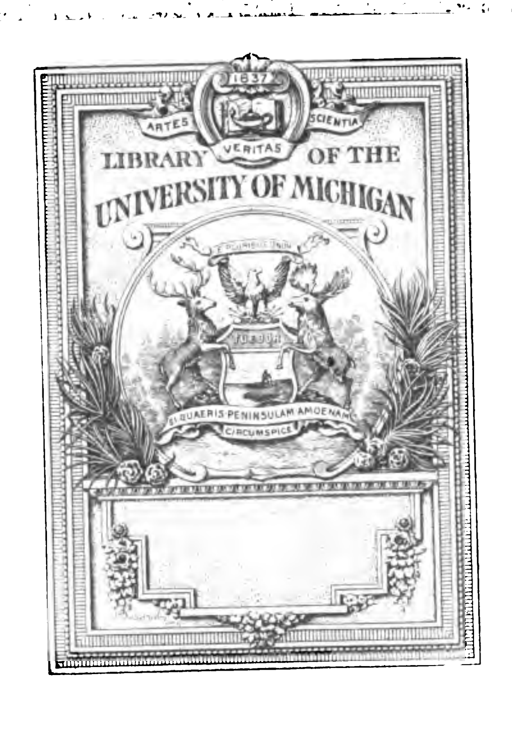
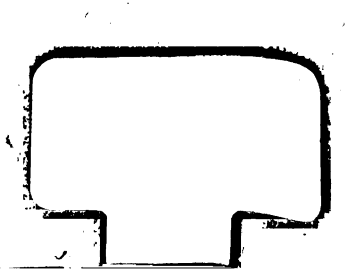
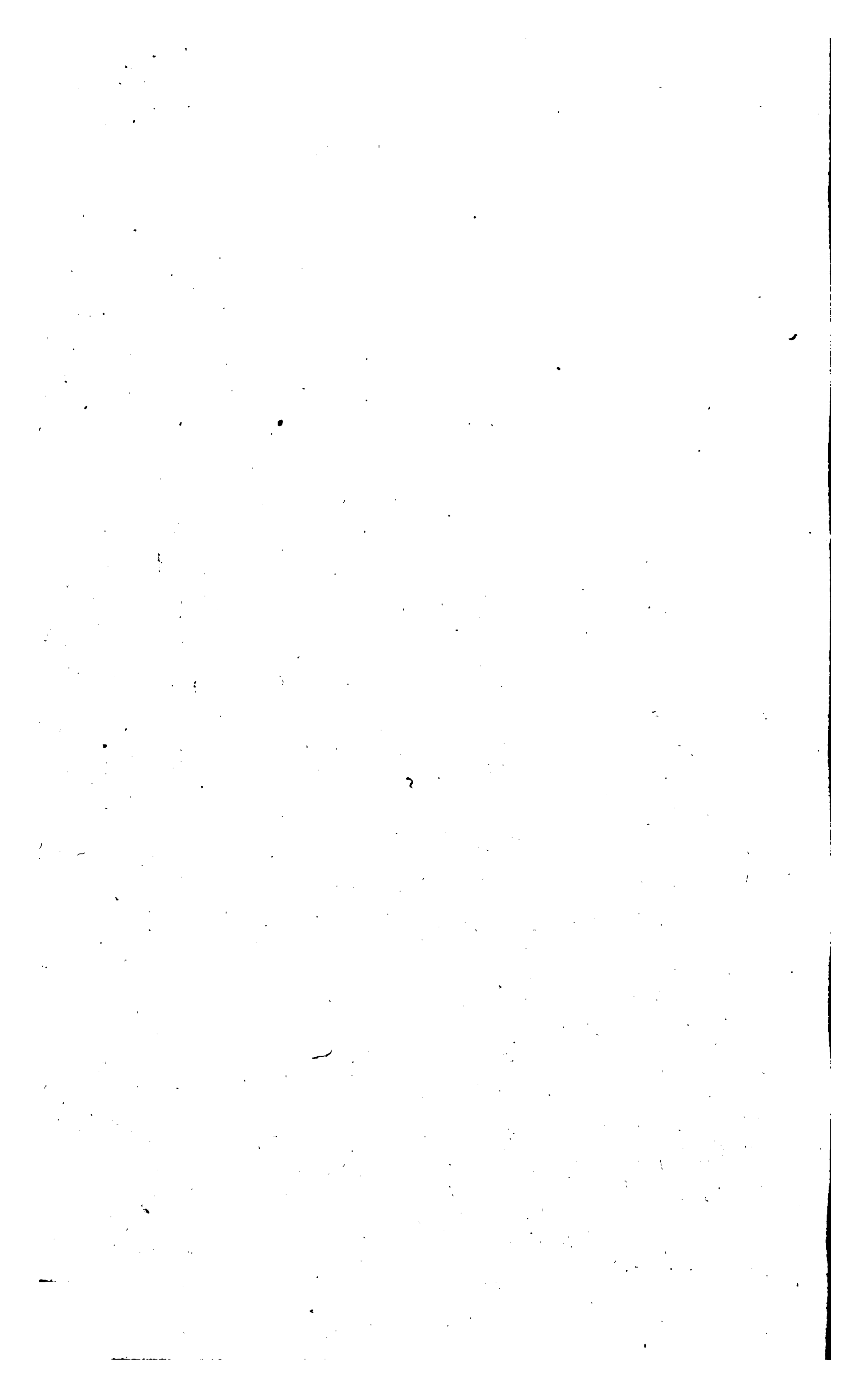



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





METAGEOMETRISCHE RAUMTHEORIEN.

EINE PHILOSOPHISCHE UNTERSUCHUNG.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

VORGELEGT VON

MORTON C. MOTT-SMITH

AUS HONOLULU (AMERIKA).

HALLE a. S.

HOFBUCHDRUCKEREI VON C. A. KAEMMERER & CO.

1907.

Referent: Prof. Dr. **Ebbinghaus.**

Meiner lieben Frau

als Zeichen der Dankbarkeit für ihre Zuneigung

und Hülfe.

Inhalt.

Einleitung.

Der Zweck der folgenden Abhandlung ist, die metageometrischen Raumtheorien, die in unserer Zeit bei den Mathematikern so günstige Aufnahme gefunden haben, in ihren philosophischen Beziehungen zu erörtern. Obwohl diese Theorien anfangs mannigfachen Widerspruch von philosophischer Seite her erfuhren, drangen sie allmählich vor, bis sie jetzt von einer grossen Anzahl der bedeutendsten Mathematiker ganz und gar angenommen worden sind. Die Art und Weise, wie die ungünstige Kritik zum Schweigen gebracht wurde, konnte leicht dazu führen, die genannten Theorien für ein ausgemachtes Resultat der modernen Wissenschaft zu halten.

Demgegenüber bin ich der Meinung, dass dieser siegreiche Zug der metageometrischen Theorien nicht so auf ihrer wirklichen philosophischen Stärke als vielmehr auf gewissen Nebenursachen beruht, infolge deren sie in reichem Masse durchaus nicht verdientes Ansehen und Stütze erlangten. Damit will ich nicht die leisesten Zweifel in ihre mathematische Richtigkeit setzen. So hervorragende Mathematiker wie Gauss, Lobatschefsky, Riemann, Beltrami, Helmholtz, Klein, Poincaré,[1]) Hilbert und viele andere fast ebenso grosse mathematische Fachgelehrte haben an der Untersuchung dieser Theorien mitgearbeitet, und es

1) Poincaré ist kürzlich, als dem grössten lebenden Mathematiker der neue Bolyai-Preis zuerkannt worden, der von der ungarischen Akademie der Wissenschaften gestiftet ist. Hilbert wurde, als einem Gelehrten von fast gleicher Grösse, eine ehrenvolle Erwähnung zu teil.

dürfte gewagt erscheinen, wenn man diesen Männern mathematische Irrtümer nachweisen wollte. Hier soll nicht die Richtigkeit der mathematischen Formeln, sondern die philosophische Interpretation erörtert werden, die von ihnen zu geben ist, eine Frage, die, wie Gauss selbst sagte, „unmittelbar an die Metaphysik streift".[1]) Sicher ist es eine für die Erkenntnistheorie interessante und wichtige Frage.

Einer der Umstände, die dazu geführt haben, die Aufnahme der metageometrischen Theorien zu fördern und die philosophische Kritik in Misskredit zu bringen, ist der Versuch von Seiten vieler Philosophen gewesen, in den neuen Theorien mathematische Irrtümer nachzuweisen. Aber wegen der Schwierigkeiten, welche die in Frage kommenden mathematischen Probleme darbieten, und welche nur die hervorragendsten Mathematiker zu überwinden im stande sind, begingen die Philosophen infolge ihrer ungenügenden mathematischen Kenntnisse bei ihrem Versuch, mathematische Fehler aufzudecken, gewöhnlich selbst Irrtümer. Dadurch wurde ihrer Sache entschieden geschadet und unter den Mathematikern eine gewisse Geringschätzung der philosophischen Kritik hervorgerufen. Die Mathematiker schlossen, wenn auch mit Unrecht, dass alle solche Einwände lediglich auf mathematischen Missverständnissen beruhten, und unterliessen es gänzlich, die wahren philosophischen Gründe zu würdigen, aus denen die Einwände erhoben wurden. Dazu kam ferner, dass die einzige andere wichtige Opposition gegen die metageometrischen Theorien von Gymnasiallehrern oder anderen Lehrern der Elementargeometrie herkam. Alles dies führte zu der Meinung, alle Opposition beruhe bloss auf Missverständnissen und würde aufhören, wenn diese Missverständnisse beseitigt werden könnten. Die grossen Namen, an die sich die Theorie knüpft, haben zu dieser Annahme beigetragen. Infolgedessen wurde von mathematischer Seite fast nichts zur Verteidigung ihrer philo-

1) Siehe Gauss, Brief an Schuhmacher, Juli 1831, Staeckel und Engel, Theorie der Parallellinien, S. 234.

sophischen Stellung oder als Antwort auf die philosophischen Einwände der Philosophen unternommen. Das Wenige, was vorliegt, rührt fast nur von den wenigen Philosophen her, die die metageometrischen Theorien angenommen haben. Die Mathematiker haben es in der Regel für hinreichend erachtet, ihre Bemühungen auf die Erklärung und Aufhebung der Schwierigkeiten der mathematischen Theorie zu beschränken.

Die Schwierigkeit der in Frage kommenden Mathematik stand einer hinreichend gründlichen Prüfung der Theorien von Seiten vieler Philosophen hindernd im Wege. Die Philosophen haben in der Regel die Sache zu leicht genommen und sich begnügt, gelegentlich hier und da die Theorien im Zusammenhang mit andern Dingen zu besprechen. Daher sind ihre Aufsätze durch andere Schriften oder durch die philosophischen Zeitschriften hindurch zerstreut, oft unter sehr irreführenden Titeln, sodass sie nur sehr schwer zu finden sind. Es herrscht daneben keine Übereinstimmung unter ihnen. Oft haben wir es mit Entgegnungen auf Widerlegungen anderer zu tun, und sehr häufig werden die metageometrischen Theorien nur zu dem Zweck widerlegt, des Autors Lieblingstheorie zu fördern, die selbst vielleicht von der Allgemeinheit der Philosophen verworfen wird.

Demgegenüber begegnen wir unter den Mathematikern, trotz kleinerer Differenzen, allgemeiner Übereinstimmung. Die Gelehrten, welche den Gegenstand durchforscht haben, verwandten gewöhnlich den grössten Teil ihrer Zeit darauf. Ihre Arbeiten zeichnen sich durch Einheitlichkeit und System aus, und ihre wenn auch umfangreichen Schriften sind zugänglich. Bisher sind schon zwei oder drei vollständige Bibliographien darüber erschienen.[1]) Daher haben wir auf mathematischer Seite sozusagen nur eine Theorie, die nach Anerkennung strebt, auf philosophischer Seite dagegen

1) Eine der letzten ist von R. Bonola herausgegeben: Index operum ad geometriam absolutam spectantium. Claudipoli, 1902.

viele Theorien, die nicht nur die mathematische, sondern auch einander bekämpfen.

Auf mathematischer Seite kommt ferner noch der Vorzug hinzu, dass alles mathematisch bewiesen erscheint. Die Theorie erhebt den Anspruch, wissenschaftlich zu sein. Auf philosophischer Seite dagegen scheint alles auf den ersten Blick nur als Sache persönlicher Meinung, nur als Spekulation.

Alle diese Umstände, meine ich, haben in nicht geringem Grade zu dem Erfolg der Metageometrie beigetragen. Aber sie sind, wie ich später zu zeigen hoffe, recht illusorisch. Es wird sich zeigen, dass der Grund für den Widerspruch der Lehrer der Elementarmathematik gegen die Metageometrie nicht in ihrer Unkenntnis der höheren Mathematik zu suchen ist, sondern dass die Lehrer zu ihrem ablehnenden Verhalten vielmehr durch ihre Erfahrungen bezüglich der pädagogischen Unentbehrlichkeit der Anschauung veranlasst wurden. Wir werden sehen, dass die Mathematiker nicht alles mathematisch bewiesen haben, was sie behaupteten, und dass besonders der Empirismus, der als Resultat der neuen Theorien erscheint, stattdessen eine Voraussetzung derselben ist und die Rechtfertigung dieses erkenntnistheoretischen Standpunktes daher nicht in der Mathematik, sondern nur in der Philosophie zu suchen ist.

Auch die Geschichte des Gegenstandes ist, soviel ich weiss, von philosophischer Seite noch nicht eingehend behandelt worden. Die mathematischen Darstellungen, die bis jetzt erschienen sind, haben nur beabsichtigt, den Ursprung und den Beweis der damit verbundenen Mathematik zu zeigen. Meines Wissens existiert noch keine geschichtliche Darstellung der metaphysischen und philosophischen Theorien über den Raum, die aus der nichteuklidischen Geometrie hervorgegangen sind und die ich als „metageometrische Raumtheorien“ bezeichnet habe, in der ihr Ursprung und ihre Entwicklung wiedergegeben wird und welche zeigt, wie weit die genannten Theorien berechtigte Folgen der nichteuklidischen

Geometrien sind und wie weit sie auf anderen nicht ausgedrückten Annahmen beruhen, welches diese Annahmen, ihr Ursprung und ihre Begründung sind. Die Philosophen haben wiederholt darauf hingewiesen, dass die Metageometrie solche unausgedrückten philosophischen Annahmen enthalte, und haben gewöhnlich ihre Widerlegungen darauf gegründet; da aber der Ursprung derselben nicht gezeigt und dadurch ihr wirkliches Vorhandensein nicht bewiesen wurde, sind die Metageometer geneigt gewesen, derartige Annahmen zu bezweifeln. Eine historisch-kritische Behandlung der metageometrischen Raumtheorien, wie sie im ersten Teil dieser Arbeit gegeben werden soll, dürfte daher von nutzen sein und Licht auf die Rechtfertigung der uns hier interessierenden Theorien werfen.

In dem zweiten Teil werden wir dann den Ursprung und die Rechtfertigung jenes mathematischen Empirismus untersuchen, der, wie die Geschichte im ersten Teil zeigen wird, die Hauptvoraussetzung der Metageometrie ist. Wir werden ihn, denke ich, teils richtig, teils ungerechtfertigt finden. Wir werden erkennen, dass, obwohl die Grundlagen der Geometrie schliesslich als a priori bezeichnet werden müssen, dies nicht ganz in dem Sinne verstanden werden darf, in dem es, nach der gewöhnlichen Annahme, Kant gemeint hat. Ich habe die „reine Anschauung" verworfen, auf die Kant die Geometrie gründete, und der fast alle Metageometer und auch einige Philosophen entgegengetreten sind, und an ihrer Stelle habe ich Kromann's Theorie angenommen, die, wie mir scheint, die Natur und den Ursprung unserer geometrischen Kenntnis vollkommen erklärt. So habe ich mich teils der sogenannten rationalen, teils der empirischen Erklärung angeschlossen. Diese beiden Ansichten unterscheiden sich, meiner Meinung nach, in ihren wesentlichen Bestandteilen nicht so sehr, wie man gewöhnlich annimmt. Von dem Punkte aus, in dem sie zusammentreffen, kann eine befriedigende geometrische Theorie aufgebaut werden. Ob dies dann empirisch oder a priori

genannt werden soll, hängt ganz davon ab, wie diese Ausdrücke definiert werden. Die Entscheidung darüber ist, wie fast immer bei philosophischen Fragen, mehr Sache feiner Unterscheidungen als zwingender Argumente. Der Leser, der hier zwingende Argumente zu finden hofft, wird sich daher enttäuscht sehen. Das Höchste, was man zu erreichen hoffen kann, ist die gleichmässige und gerechte Verteilung der ins Gewicht fallenden Faktoren.

I. Teil.

Kritische Geschichte der nichteuklidischen Geometrie und der daraus hervorgehenden metageometrischen Raumtheorien.[1])

1. Abschnitt.
Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie.

§ 1. Das Parallelenpostulat.

Bekanntlich verdankt die nichteuklidische Geometrie ihre Entstehung der Diskussion über die Parallelen. Das fünfte Postulat (oder elfte Axiom) des Euklid sagt: „Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden ins Unendliche verlängert, schliesslich auf der Seite zusammen-

1) Zu den Vorstudien für diese Geschichte haben sich mir folgende Werke als besonders nützlich erwiesen:

Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig 1895.

Roberto Bonola, La geometria non euclidea. Esposizione storicocritica del suo sviluppo. Bologna 1906.

F. Engel, Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit einer Biographie des Verfassers. Leipzig 1898.

W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. 2 Bände, 1893/98.

Felix Klein, Nicht-Euklidische Geometrie. Vorlesungen gehalten während des Wintersemesters 1889/90. Göttingen 1893.

B. A. Russell, The Foundations of Geometry. Cambridge 1897.
Diese Bücher werden im Text nur mit dem Namen des Autors zitiert werden.

treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.“ In den ersten 28 Sätzen ist dies Postulat garnicht gebraucht. Erst Satz 29, der die einfache Umkehrung von Satz 28 ist, kommt das Postulat zur Anwendung. Es ist daher sehr wahrscheinlich, dass Euklid erst veranlasst wurde, diesen Satz unter die Postulate aufzunehmen, nachdem er vergeblich versucht hatte, Satz 29 zu beweisen. „Dass ein solches Verfahren mangelhaft ist, kann keinem Zweifel unterliegen,“ sagt Killing.[1])

Allerdings kann uns das fünfte Postulat oder das elfte Axiom[2]) in der Form, in der Euklid es ausdrückt, auf den ersten Blick durchaus nicht als ein selbstverständlicher Satz vorkommen. Er erscheint seltsam unangebracht unter so einfachen Behauptungen wie die, dass alle rechten Winkel gleich sind, oder dass zwei gerade Linien nicht einen Raum einschliessen können. Aber daraus gleich zu schliessen, dass er deshalb nicht unter diese gehöre, scheint mir etwas voreilig zu sein. Es könnte sehr gut der Fall sein, dass nur die Ausdrucksweise Euklids verwickelt und ungeschickt ist. Könnte es nicht möglich sein, einen einfacheren Ausdruck für dies Postulat zu finden, in dem seine Ursprünglichkeit und Selbstverständlichkeit unmittelbar zu Tage träte?

Die Mathematiker scheinen indes schon von Anfang an anders gedacht zu haben, und fast allgemein der Ansicht gewesen zu sein, Euklid habe sein berühmtes Postulat an den Anfang gesetzt, nicht weil er eingesehen hätte, dass es unbeweisbar sei, sondern weil es ihm nicht gelungen wäre, es zu beweisen. Diese Lücke, die das Fehlen des erforderlichen Beweises bildet, waren die Mathematiker von damals bis in die neueste Zeit hinein unaufhörlich bemüht auszufüllen.

---

1) Killing, Bd. II, S. 2.

2) Diese Stelle wurde ihm später gegeben.

Proklos (410—485. A. D.). Schon Proklos[1]) versuchte in seinem Kommentar zu Euklids Elementen das Parallelenpostulat zu beweisen und erwähnt und kritisiert mehrere andere in jener Zeit bekannte Beweise, ausgehend von Posidonius (im ersten Jahrhundert vor Christus). Seit 1533, wo Proklos Kommentar zu Basel gedruckt wurde, bis auf Gauss wurden unzählige andere Versuche gemacht, das Parallelenpostulat zu beweisen.[2]) Viele von diesen sind sehr interessant und geistreich, aber alle misslangen. Jeder geht von einer Voraussetzung aus, die sich als gleichbedeutend mit dem zu beweisenden Postulat herausstellt. Nichtsdestoweniger sind sie sehr nützlich gewesen, insofern sie einige Formen zu Tage förderten, wodurch das Parallelenpostulat ausgedrückt werden kann, und die einfacher und offenbar selbstverständlicher scheinen als die, in der Euklid das Postulat formulierte. Einige dieser äquivalenten Formen sind folgende:[3])

Wenn eine gerade Linie, die mit zwei Parallelen in derselben Ebene liegt, die eine von diesen trifft, so trifft sie auch die andere. (Proklos.) Oder: Zwei Gerade, welche derselben Dritten parallel sind, sind auch einander parallel. Oder: Durch jeden Punkt kann nur eine einzige Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

Parallele Linien haben gleichen Abstand von einander.

Zu jedem Dreieck lässt sich ein ähnliches in beliebig grossem Massstabe zeichnen. (Wallis 1693.)

Durch jeden Punkt innerhalb eines ebenen Winkelfeldes kann man eine gerade Linie ziehen, welche beide Schenkel schneidet. (Lorenz 1791.)

Die beiden Winkel, welche zwei Parallelen mit derselben geraden Linie bilden, sind gleich. (Leibniz.)

1) Proklos, In primum Euclides elementorum librum commentarii. E. Friedlein. Leipzig 1873. Bonola, S. 2.

2) Stäckel und Engel geben ein Verzeichnis von nicht weniger als 240 Werken über die Parallelen, die während dieser Periode veröffentlicht sind. Siehe S. 293—313. Vgl. Killing, S. 1—11. Bonola, S. 1—19.

3) Siehe Bonola, S. 111, und Killing, S. 3—4.

Die Linie gleichen Abstandes von einer gegebenen Geraden ist selbst eine Gerade. (Clavio 1574; Borelli 1658).

Die Summe der Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht kleiner sein als zwei Rechte. (Legendre 1794.)

Alle diese erfolglosen Untersuchungen liefern den sicheren Beweis für die Vermutung, dass Euklids Postulat wirklich unbeweisbar ist, und dass eine einfachere Form gefunden werden kann. Indessen zogen die Mathematiker diesen Schluss nicht, sondern sie schlugen einen anderen Weg ein, dessen Resultate den Gegenstand dieser historischen Darstellung bilden werden.

§ 2. Legendre (1752—1833).

Diese Versuche eines direkten Beweises des Parallelenpostulates gipfelten in Legendres bekannter Untersuchung.[1]) Dieser wies nach, dass das Parallelenpostulat gleichbedeutend sei mit dem Satz, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt. Ihm glückte dann ohne Hilfe des Parallelenpostulates oder einer ähnlichen Annahme der Beweis, dass diese Summe zwei Rechte nicht überschreiten könnte, und dass, wenn sie in irgend einem Dreieck gleich oder kleiner als zwei Rechte wäre, sie es auch in allen andern sein würde. Andrerseits machte es ihm grosse Schwierigkeit zu beweisen, dass die Winkelsumme nicht kleiner sein könnte als zwei Rechte. Er fand endlich, dass eine solche Annahme eine Abhängigkeit der Länge der Seiten des Dreiecks von der Grösse der Winkel in sich schliesst (also das Vorhandensein eines absoluten Längenmasses einschliesst), eine Folgerung, die Legendre absurd zu sein und daher die Annahme zu entkräften schien, von der sie ausging. Aber diese Folgerung als absurd zu ver-

---

1) Adrien Marie Legendre, Eléments de Géométrie. Paris, 1. Aufl. 1794, gibt einen analytischen Beweis; in der dritten und in späteren Auflagen finden sich verschiedene geometrische Beweise. Zusammenfassende Darstellung 1833. Siehe Stäckel und Engel S. 212—213. Bonola S. 49—54.

werfen, heisst die Möglichkeit ähnlicher Figuren behaupten, also das Parallelenpostulat in der Form annehmen, in der es von Wallis (siehe oben S. 9) gegeben wird. Daher muss dieser Teil von Legendres Beweis wie alle anderen als eine petitio principii angesehen werden. Doch ist Legendres Beweis wichtiger als die anderen nicht nur durch die allgemeine Bekanntheit, die er durch die grosse Verbreitung der „Eléments" erlangte, und durch das erneute Interesse, das er so an dem Problem des Parallelenpostulats erweckte, sondern auch wegen seines Erfolges in dem ersten Teil, wo er nachweist, dass die Winkelsumme eines Dreiecks nicht grösser sein kann als zwei Rechte, und dass die entgegengesetzte Annahme das Vorhandensein eines absoluten Längenmasses in sich einschliesst. Dies war eine wirkliche Vermehrung unsrer Kenntnis, die in der Folge sehr wichtig wurde.

§ 3. Saccheri (1667—1733).

Eine neue Aera in der Geschichte unseres Gegenstandes war jedoch schon von einem italienischen Jesuitenpriester, Girolamo Saccheri, ins Leben gerufen. Dieser kam darauf, das Parallelenpostulat zu verwerfen und zu sehen, ob unter den Folgerungen einer solchen Verwerfung eine gefunden werden könnte, die entweder sich selbst oder einem der ersten 27 Sätze Euklids widerspräche, die ohne die Anwendung des Parallelenpostulates aufgestellt sind. Er suchte so einen indirekten Beweis des letzteren und wurde so der ursprüngliche Erfinder der nichteuklidischen Geometrie, oder der Geometrie, die sich auf Verwerfung von Euklids Postulat gründet, und als deren tatsächlicher Urheber gewöhnlich Lobatschefsky angesehen wird. Das Buch, das seine Forschungen enthält, heisst: „Euclides ab omni naevo vindicatus u. s. w." Es wurde gleich nach seinem Tode im Jahre 1733 herausgegeben. Es scheint zu seiner Zeit ziemlich bekannt gewesen, in der Folge aber vergessen zu sein, bis es über 150 Jahre später, im

Jahre 1889, von seinem Landsmann Beltrami[1]) wieder entdeckt wurde.

Saccheri geht bei seinen Untersuchungen von einem Viereck aus, in dem zwei rechte Winkel und die an diese angrenzenden Seiten gleich sind. Unabhängig vom Parallelenpostulat beweist er, dass die übrigen beiden Winkel gleich sein müssen. In Bezug auf diese sind nun drei Annahmen möglich. Entweder müssen sie auch rechte Winkel sein — in diesem Falle bleibt das Parallelenpostulat in Gültigkeit —, oder sie müssen beide stumpf oder beide spitz sein. In jedem dieser beiden letzten Fälle ist das Parallelenpostulat verletzt. Saccheri nennt diese beiden letzteren Fälle die Annahme des stumpfen bezw. des spitzen Winkels und entwickelt ihre Folgen: Es wird ihm nicht schwer, zu zeigen, dass die Annahme des stumpfen Winkels bald zu einem Widerspruch sowohl mit sich selbst wie mit Euklids Satz 17 führt, der aussagt, dass in jedem Dreieck irgend zwei Winkel zusammengenommen kleiner sind als zwei Rechte. Er bewies auch, dass eine Folge dieser Annahme die ist, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks grösser ist als zwei Rechte, während eine Folge der Annahme des spitzen Winkels die ist, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks kleiner ist als zwei Rechte. Ferner bewies er, dass, wenn die Summe gleich oder kleiner als zwei Rechte in irgend einem Dreieck ist, es so auch in allen sein wird. Hierdurch griff er Legendre in seinen beiden bekannten Sätzen vor. Aber ebenso wie Legendre machte es auch ihm grosse Mühe, die Annahme des spitzen Winkels zu widerlegen. Er fand

---

1) Beltrami, Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschefsky. Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno 1889. Serie 4. Vol. V. S. 441—448. Später wurde das Werk von Saccheri ins Englische übersetzt von G. B. Halsted. Amer. Math. Monthly Vol. I. Heft 1 u. fg. 1894, ins Deutsche von Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien, S. 41—136, 1895, ins Italienische von G. Boccardini, Mailand 1904. Eine abgekürzte Darstellung gibt auch Bonola, S. 20—38. Eine kurze Übersicht über das Leben dieses merkwürdigen Mannes gibt Stäckel und Engel S. 33—39. Im Text folge ich Stäckel und Engel.

es dazu nötig, die Entwicklung der Folgen dieser Annahme ziemlich weit zu treiben. Das System der so entwickelten Sätze bildet das, was jetzt die nichteuklidische Geometrie im engeren Sinne genannt wird. Es wurde später wieder entdeckt und erweitert von Lobatschefsky und Bolyai.

Einige der wichtigeren Sätze dieser von Saccheri entdeckten Geometrie sind, dass durch einen Punkt ausserhalb einer gegebenen geraden Linie ein ganzes Bündel von Strahlen gezogen werden kann, die alle in der durch den Punkt und die gegebene Gerade bestimmten Ebene liegen und die jedoch die gegebene Linie, auch wenn sie ins Unendliche verlängert werden, nicht schneiden (Lehrsatz XXXII, Stäckel S. 107); — dass es eine Linie geben wird, die die Grenze zwischen den schneidenden und den nichtschneidenden Geraden bildet. Diese Linie nennt er, wie später Lobatschefsky und Bolyai, die Parallele zu der gegebenen Linie, und zeigt, dass sie mit der Senkrechten, die von dem Punkt auf die gegebene Linie gefällt ist, einen spitzen Winkel bildet (von Lobatschefsky der Parallelwinkel genannt), — dass auf einer Seite dieser Senkrechten die Parallele sich der gegebenen Linie nähert, und auf der andern Seite sich von ihr entfernt, — dass zu gleicher Zeit die Winkel mit den Senkrechten, welche von Punkten nach einander auf die Konvergenzseite gefällt werden, weniger und weniger spitz, und schliesslich bei unendlicher Entfernung zu einem rechten Winkel werden. So nähert sich die Parallele der gegebenen Linie asymptotisch und hat bei unendlicher Entfernung einen gemeinsamen Punkt und eine gemeinsame Senkrechte mit ihr.[1]) Hierin findet Saccheri endlich den Widerspruch, nach dem er lange gesucht hat, da ein solches Verhalten von Seiten einer Parallele, wie er meint, der Natur der geraden Linie widerspricht, denn aus

---

1) Dass die Parallele zu einer gegebenen Linie nach der Definition Euklids sich der letzteren asymptotisch nähern könnte, war schon von Proklos (S. 177) hervorgehoben. Vgl. Bonola, S. 2.

dem Grundsatz von der geraden Linie folgt, dass zwei gerade Linien ein gemeinsames Segment nicht haben können, ohne in ihrer ganzen Länge zusammenzufallen. (Hilfssatz II, S. 111.)

Gerade derselbe Einwand ist gegen die nichteuklidische Geometrie in neuster Zeit von F. Pietzker erhoben, („Gestaltung des Raums" 1891 Braunschweig, also über 150 Jahre nachher), anscheinend ohne Kenntnis von seinem Vorgänger. Pietzker sagt (a. a. O., S. 7): „Die von der nichteuklidischen Geometrie geforderte Möglichkeit asymptotischer Näherung zwischen zwei Geraden ist eben mit dem Begriffe solcher Linien von vornherein unvereinbar." Er findet auch (S. 9), dass analog zwei parallele Ebenen bei unendlicher Ausdehnung sich in einem gemeinsamen Punkt treffen würden, wo sie eine gemeinsame Senkrechte haben würden. Dies, sagt er, widerspricht auch der Natur der Ebene.

Saccheri gibt auch noch eine zweite Methode an, die Annahme des spitzen Winkels zu widerlegen. Er beweist (Lehrsatz XXXIV, Stäckel, S. 123), dass nach dieser Annahme die Parallele der geraden Linie eine gewisse Kurve ist, und dass (Lehrsatz XXXVII, Stäckel, S. 125) die Länge dieser Kurve zwischen irgend zwei Senkrechten dieselbe ist wie die der Grundlinie. Da nun nach der Annahme des spitzen Winkels die gerade Linie, die die Endpunkte dieser Senkrechten verbindet, länger ist als die Grundlinie, so folgt daraus, dass diese Kurve kürzer sein muss als die gerade Linie, die ihre eigenen Endpunkte verbindet. Dies erweist sich alles, sagt Saccheri, nach unmittelbarer Anschauung als unmöglich. So ist die Annahme des spitzen Winkels widerlegt, und das Parallelenpostulat behält seine Gültigkeit. Aber diese Berufung auf die direkte Anschauung ist ein Bekenntnis der Schwäche. Da unsere Anschauung mit der euklidischen Geometrie übereinstimmt, die auf dem Parallelenpostulat beruht, muss jede Berufung darauf daher ebenfalls als eine petitio principii angesehen werden. Die nichteuklidische Geometrie ist überall in direktem

Widerstreit mit der Anschauung, so dass, wenn wir sie aus diesem Grunde verwerfen sollten, wir das schon gleich zu Anfang hätten tun können, ohne vorher so viele unanschauliche Sätze zu entwickeln.

So geistreich und scharfsinnig Saccheris Versuch also, das Parallelenpostulat zu beweisen, auch sein mag, so muss er gleichfalls als gescheitert angesehen werden. Aber wie Kolumbus, obwohl es ihm nicht glückte, sein vorgestrecktes Ziel zu erreichen, doch statt dessen eine neue Welt entdeckte, so entdeckte Saccherie die neue Art der Geometrie, die aus der Annahme des spitzen Winkels hervorging. Sehr wichtig ist auch die Tatsache, dass er in Übereinstimmung mit Legendre nur wenig Schwierigkeiten hatte, die Annahme des stumpfen Winkels zu widerlegen, dass es ihm aber nicht gelang, die des spitzen Winkels als falsch zu beweisen. Dies wird jetzt als ein deutlicher Beweis dafür angesehen, dass die erstere Annahme im Gegensatz zur letzteren nicht unabhängig von den anderen Axiomen ist.

§ 4. Lambert (1728—1777).

Ein ganz ähnlicher Versuch wie der Saccheris wurde auch von dem Schweizer Mathematiker Lambert gemacht, dessen unvollendetes Werk „Theorie der Parallellinien" nach seinem Tode von Johann Bernoulli,[1]) einem Enkel des berühmten Mathematikers gleichen Namens, im Jahre 1786 veröffentlicht wurde. Lambert, dem Saccheris Werk bekannt war, beginnt genau auf dieselbe Weise, nur dass er ein Viereck anwendet, dessen drei Winkel Rechte sind. Der vierte Winkel kann also entweder ein rechter oder ein stumpfer oder ein spitzer Winkel sein. Ebenso

1) J. Bernoulli, Magazin für die reine und angewandte Mathematik 1786. Diese Zeitschrift ist nur von 1785 bis 1788 erschienen. Lamberts Werk wurde 1766 aufgelegt. Es ist wieder gedruckt in Stäckel und Engel, S. 152—208. Sein Leben a. a. O. S. 139—151. Siehe auch Bonola, S. 38—45.

wie Saccheri wurde es ihm nicht schwer, die Annahme des stumpfen Winkels zu widerlegen. Aber die Folgen des spitzen Winkels musste er sehr ausführlich entwickeln, und auch bei seinem Tode war es ihm noch nicht geglückt, einen Widerspruch zu entdecken. Zu den von Saccheri entdeckten Sätzen stellte Lambert die folgenden wichtigen Sätze auf: Bei beiden Annahmen ist die Fläche eines Dreiecks proportional der Abweichung der Summe seiner Winkel, positiv oder negativ, von zwei rechten Winkeln. Die Geometrie des stumpfen Winkels stimmt genau überein mit der der Kugel und kann darauf verwirklicht werden, während die des spitzen Winkels auf einer imaginären Kugel verwirklicht werden kann. Die sphärische Geometrie ist daher unabhängig von dem Parallelenpostulat. Ferner schliesst Lambert aus dem Nichtvorhandensein der Ähnlichkeit bei beiden Annahmen das Vorhandensein eines absoluten Masses der Länge, indem er so Legendre[1]) vorgreift. Lamberts Werk scheint ebenso der Vergessenheit anheim gefallen gewesen zu sein, bis es über hundert Jahr später von Paul Stäckel im Jan. 1893 wiederentdeckt wurde.[2])

2. Abschnitt.

Erste Periode der Geschichte der Metageometrie.

Gauss, Lobatschefsky, Bolyai.[3])

§ 5. Anfang des mathematischen Empirismus.

Es ist schon bemerkt worden, dass der Misserfolg der unzähligen Versuche, die bis herab zu Gauss zum Beweise

1) Stäckel und Engel, S. 144—145.

2) Stäckel und Engel, S. III u. IV, Vorwort.

3) Diese Einteilung der metageometrischen Gesch. in 3 Perioden: 1. Gauss, Lobatschefsky und Bolyai; 2. Riemann, Beltrami, Helmholtz; 3. Cayley und Klein, ist von Klein gegeben in seinen Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie, und ich folge ihr.

des Parallelenpostulates angestellt worden waren, sicher auf die wirklich axiomatische Natur der Postulate hinweisen. Nichtsdestoweniger zogen die Mathematiker den Schluss nicht. Die Idee, dass dies Postulat zu kompliziert sei, um als ein Axiom zu gelten, dass es der erforderlichen Einfachheit und Selbstverständlichkeit ermangele, scheint sich so in ihrem Kopfe festgesetzt zu haben, dass, da seine Unbeweisbarkeit sich mehr und mehr ergab, allmählich die Überzeugung wuchs, es müsse empirischen Ursprungs sein. Wenn es nicht mathematisch bewiesen werden kann, dann können wir es nur aus Erfahrung wissen. Der erste, der diese Ansicht offen ausgesprochen hat, scheint, nach Stäckel und Engel[1]) ein Schüler Kästners namens Klügel gewesen zu sein, der in einer Dissertation vom Jahre 1763, nachdem er das Misslingen aller Versuche, das Parallelenpostulat zu beweisen, bis herab auf jene Zeit, mit Einschluss der Arbeiten von Saccheri besprochen hat, sagt: „Möglich wäre es freilich, dass Gerade, die sich nicht schneiden, von einander abweichen. Dass so etwas widersinnig ist, wissen wir nicht in Folge strenger Schlüsse oder vermöge deutlicher Begriffe von der geraden und der krummen Linie, vielmehr durch die Erfahrung und das Urteil unserer Augen."

§ 6. Gauss. (1777—1855.)

Gauss war indess der erste, der von der empirischen Natur des Parallelenpostulates ganz und gar überzeugt war und ein wirkliches Dreieck ausmessen liess in der Absicht, festzustellen, ob die Summe seiner Winkel wirklich in Übereinstimmung mit der euklidischen Theorie[2]) 180 Grad betrüge. Er war auch der erste, der die Sätze, die aus der Annahme des spitzen Winkels folgten, die er unabhängig von Saccheri und Lambert wieder entdeckte, als eine neue Art Geometrie betrachtete, die neben der euklidischen

1) Stäckel und Engel, S. 140.

2) Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, I, S. 164.

und unabhängig von ihr bestehe, und die jedoch nicht weniger konsequent und zusammenhängend als diese und a priori gleichberechtigt mit ihr sei. Zuerst nannte er diese neue Geometrie antieuklidische und später nichteuklidische Geometrie.[1]) So war er auch der Urheber dieses jetzt viel gebrauchten Ausdrucks.[2]) Er sah diese neue Geometrie so an, als bezöge sie sich auf eine andere Art Raum, als den unserer Anschauung, und war der Meinung, dass die euklidische Geometrie, obwohl sie unzweifelhaft für alle irdischen Entfernungen richtig genug war, für sehr grosse Figuren nicht ausreichen könnte, und dass die nichteuklidische in der Tat wahr sein könnte.[3])

Obwohl Gauss nach seinen eigenen Äusserungen sich über fünfzig Jahre mit diesen Untersuchungen beschäftigte, veröffentlichte er doch bei Lebzeiten nichts darüber, weil, wie er 1829 an Bessel schrieb, er das „Geschrei der Boeoter“[4]) scheute. Alles, was wir darüber wissen, haben wir aus Bemerkungen, die in seinen Briefen enthalten sind, besonders in seinem Briefwechsel mit Schuhmacher (herausgegeben 1860—63) und mit Wolfgang Bolyai,

---

1) Siehe Brief an Schumacher 1831. Stäckel u. Engel, S. 233.

2) Der Ausdruck nichteuklidische Geometrie wird heutzutage gebraucht, um eine Geometrie zu bezeichnen, die auf einem Krümmungsmasse beruht. Der Ausdruck mehrdimensionale Geometrie wird für eine Geometrie gebraucht, in der die Anzahl der Dimensionen nicht beschränkt ist. Solche Geometrie kann euklidisch oder nichteuklidisch sein, je nachdem ein Krümmungsmass darin zu Grunde gelegt ist oder nicht. Die Ausdrücke Metageometrie oder „géométrie générale“ werden gebraucht, um im allgemeinen eine Geometrie zu bezeichnen, in der keine Einschränkung gemacht ist, weder in Beziehung auf das Krümmungsmass noch auf die Anzahl der Dimensionen. Die Ausdrücke werden in dieser Weise auch hier gebraucht werden.

3) In der nichteuklidischen Geometrie steht die Abweichung der Summe der Winkel eines Dreiecks von 2 rechten Winkeln im Verhältnis zu der Grösse des Dreiecks. Daher die Notwendigkeit sehr grosser Dreiecke für einen empirischen Versuch. Dieser Satz wurde zuerst von Lambert entdeckt. Siehe S. 16.

4) Stäckel und Engel, S. 226. Diese Stelle wird überall zitiert.

seinem Jugendfreund;[1]) dazu kommen ein paar Sätze, die er auf Zettel zu schreiben angefangen aber nicht zu Ende geführt hatte, und die sich in seinem Nachlass fanden. Es ist daher unmöglich, ganz genau zu wissen, in wieweit Gauss die nichteuklidische Geometrie in seinem eigenen Kopfe entwickelt hat. Er entdeckte jedoch die Existenz einer Raumkonstante K, deren Wert nur durch Experimente bestimmt werden kann, und die, wenn sie unendlich ist, die neue Geometrie mit der alten zusammenfallen lässt. Er entdeckte wahrscheinlich auch die Grenzlinie, die bei Lobatschefsky und Bolyai eine so wichtige Rolle spielt. Er erkannte auch wie Lambert und Legendre, dass die neue Geometrie die Existenz eines absoluten Masses der Länge einschlösse.[2]) So dehnte Gauss, soviel wir wissen, die Mathematik der neuen Geometrie nicht viel über den von seinen Vorgängern erreichten Standpunkt aus, obwohl die Entdeckung der Raumkonstante von Wichtigkeit war. Andererseits ist er der Hauptbegründer der metaphysischen Theorien in Bezug auf die Natur des Raumes, die um die nichteuklidische Geometrie herum erwachsen sind. Allerdings drangen diese nur indirekt durch seinen berühmten Schüler Riemann in die Öffentlichkeit. Riemanns später zu besprechende Abhandlung wurde ein Jahr vor Gauss' Tod im Jahre 1854 vorgetragen, wurde aber erst allgemein bekannt, als sie im Jahr nach Riemanns Tode, im Jahre 1868, im Druck erschien. Gauss' Zusammenhang mit diesen Ansichten und mit der nichteuklidischen Geometrie scheint erst allgemein bekannt geworden zu sein durch Baltzers Hinweis darauf in der zweiten Ausgabe seiner „Elemente der Mathematik“ vom Jahre 1867. Daher haben wir das wenige, was wir von dem grossen Vater der Metageometrie wissen, erst spät und indirekt erfahren.

---

1) Siehe auch Sartorius, W., v. Walterhausen. „Gauss zum Gedächtnis“. S. 80—81. Leipzig 1856.

2) Siehe Bonola, S. 61–63.

§ 7. Lobatschefsky und Bolyai.

Die beiden Männer, deren Namen meist mit der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie in Verbindung gebracht werden, und wodurch diese erst bekannt wurde, sind der Russe Lobatschefsky (1826) und der Ungar Bolyai (1832). Beiden Gelehrten verdankt die nichteuklidische Geometrie entschieden ihre vollständige Entwickelung. Obwohl sie Zeitgenossen von Gauss waren, scheint es doch ganz sicher zu sein, dass sie völlig unabhängig von ihm, von einander und von allen ihren Vorgängern waren.[1]) Beide entdeckten die Folgen des spitzen Winkels allein, indem sie Legendres jetzt allgemein bekannt gewordenen Beweis annahmen, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks nicht mehr als zwei Rechte Winkel betragen könnten, ein Satz, der die Annahme des stumpfen Winkels ausschliesst. Sie waren auch die ersten, die das System dieser Folgen veröffentlichten, nicht als einen Versuch, das Parallelenpostulat zu beweisen, sondern als eine neue Art oder als nichteuklidische Geometrie. Ich werde zuerst von

1) Zwei andere unabhängige Entdecker der nichteuklidischen Geometrie sind kürzlich von Stäckel und Engel ans Licht gezogen, nämlich Schweikart und Taurinus. (Siehe Stäckel und Engel, S. 243—286, und Bonola, S. 65—74.) Sie waren unabhängig von allen andern Entdeckern, aber nicht von einander. Taurinus war Schweikarts Neffe und von letzterem angeregt. Schweikart, der Professor der Jurisprudenz zu Marburg war, veröffentlichte nichts über die neue Geometrie, die er entdeckt hatte, und die er „Astralgeometrie" nannte, weil sie nur auf Figuren von astronomischer Grösse Anwendung finden konnte. Taurinus schrieb jedoch einen Bericht darüber an Gauss (siehe Stäckel und Engel, S. 249), von dem er eine günstige Antwort erhielt. (Dieser Brief ist im Facsimile wiedergegeben von Stäckel und Engel.) Taurinus gab zwei Werke heraus: „Theorie der Parallellinien", 1825, und „Geometriae prima elementa", 1826. (Letzeres Werk ist äusserst selten.) Die wesentlichen Teile dieser beiden Werke sind wiedergegeben bei Stäckel und Engel, S. 255—286. Taurinus nannte seine neue Geometrie „Logarithmisch-sphärisch", weil die trigonometrischen Formeln derselben aus denen der sphärischen Geometrie abgeleitet werden konnten, indem man den Radius einfach imaginär machte.

Bolyai sprechen, weil, obwohl seine Untersuchung später veröffentlicht wurde, die Annahme begründet ist, dass sie um dieselbe Zeit wie die Arbeit Lobatschefskys[1]) entworfen wurde. Ausserdem ist Bolyais Darstellung einfacher und elementarer als diejenige Lobatschefskys, sodass er für die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie zwischen Gauss und Lobatschefsky zu stellen ist. Zudem ist Bolyai inniger mit Gauss verbunden durch die Tatsache, dass sein Vater Wolfgang Bolyai ein Jugendfreund von Gauss war und etwas bekannt mit des letzteren Ideen über die ersten Gründe der Geometrie. (Siehe Brief von Gauss an W. Bolyai 1799. Stäckel und Engel, S. 219.) W. Bolyai hatte schon im Jahre 1804 an Gauss einen Versuch, das Parallelenpostulat zu beweisen, geschickt: „Theoria Parallelarum", die letzterer widerlegte.[2]) Daher mag der Sohn etwas von seinem Interesse an diesen Dingen von seinem Vater überkommen haben. Nichtsdestoweniger scheint er seine Ideen ganz unabhängig und sogar gegen seines Vaters Rat ausgearbeitet zu haben. Die Hauptquelle unserer Kenntnis von ihm sind seine Briefe an seinen Vater.[3])

§ 8. Johann Bolyai (1802—1860).

Johann Bolyai ging, wie seine Vorgänger, darauf aus, das Parallelenpostulat zu beweisen; nachdem er sich aber endlich überzeugt hatte, dass es nicht zu beweisen sei, schloss er daraus, dass es keinen notwendigen Bestandteil der Geometrie darstellt. Eine Geometrie würde also eine wahre oder absolute sein, wenn sie ohne Anwendung des genannten Postulates aufgebaut wäre. Nur eine solche Geometrie würde, denkt Bolyai, notwendig wahr, würde eine

---

1) Siehe Engel, Lobatschefsky. Leben und Schriften. S. 376.

2) „Theoria parallelarum", hersg. von Stäckel und Engel in Math. Ann. XLIX, Seite 168—205, 1897.

3) Stäckel und Engel, Theorie der Parallellinien, S. 241—343. Bonola, S. 86—91.

„absolute Raumwissenschaft“ sein. Auf die Entdeckung dieser Geometrie geht er aus. Ihre Möglichkeit wird durch die Tatsache glaubhaft gemacht, dass ein beträchtlicher Teil von Euklid ohne Hilfe des Parallelenpostulates bewiesen und dass dieses Postulat von Euklid erst verhältnismässig spät eingeführt wird. Dieser erste Teil gehört nach Bolyai zur absoluten Geometrie. Ihn sucht er zu vervollständigen durch die Entdeckung aller der anderen Sätze, die ohne Zuhilfenahme des Parallelenpostulates bewiesen werden können.

Seine Betrachtungen über diesen Gegenstand scheinen sich ausgedehnt zu haben von 1817—1832, wo ihre Resultate herausgegeben wurden als der dritte Anhang zu dem ersten Bande von seines Vaters Hauptwerk: „Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos. . . . .[1]) Dieser Anhang führt den Titel: „Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unqam decidenda) independentem: . . . . .[2]) Er enthält nur 28 Seiten, aber „The most extraordinary two dozen pages in the whole history of thought“, wie Halsted enthusiastisch bemerkt.[3])

Bolyai definiert die Parallele zu einer gegebenen Linie (ähnlich wie Saccheri) als die Grenze zwischen der

---

1) Das Originalwerk wurde anonym herausgegeben und ist jetzt sehr selten. Ein Neudruck wurde veranstaltet von J. König, M. Réshy, 2. Aufl., Budapest 1897, 3. Aufl. 1904.

2) In Luxusform neugedruckt von der ungarischen Akademie der Wissenschaften. Budapest 1902 bei Gelegenheit des hundertsten Geburtstages des Autors. Übersetzungen: Hoüel „La science absolue de l'espace . . . . par Jean Bolyai“, Mém. Soc. des Sciences phys. et natur. de Bordeaux, T. V. 1867. — Battaglini, „Sulla Scienza dello Spazio assolutamente vera. . . . .par Giovanni Bolyai“. Giornale di Matematiche t. VI. 1868, S. 97—115. — Deutsche Bearbeitung von J. Frischauf, „Absolute Geometrie nach Johann Bolyai“. Leipzig 1872. — C. B. Halsted, „Science Absolute of Space of Johann Bolyai“. Austin. Texas. 1891.

3) C. B. Halsted, „The Value of Non-Euclidean Geometry“. Pop. Sci. Monthly. N. Y. 1905, S. 643.

schneidenden und der nicht schneidenden Geraden in derselben Ebene und nimmt an, dass die Parallele entweder einen rechten oder spitzen Winkel bilden kann mit der Senkrechten, die von irgend einem Punkt von ihr auf die gegebene Linie gefällt ist. Dieser Winkel wurde nachher von Lobatschefsky der „Parallelenwinkel“ genannt, und die Seite der Senkrechten, auf der er spitz ist, nannte er „die Seite des Parallelismus“. Diese Ausdrücke sind in der nichteuklidischen Geometrie allgemein geworden. Folgendes sind die wichtigsten der Bolyai'schen Entdeckungen.

Bolyai leitete die Formeln der sphärischen Trigonometrie unabhängig von dem Parallelenpostulat ab und wies überzeugend ihre Unabhängigkeit davon nach, eine Tatsache, die Lambert ahnen liess, aber nicht entscheidend bewies (S. 16 oben).

Er zeigte, dass der Kreis und die Kugel, die in der euklidischen Geometrie, wenn der Radius unendlich wird, in die gerade Linie und in die Ebene übergehen, in der nichteuklidischen Geometrie in gekrümmte Figuren übergehen, den „Grenzbogen“ bezw. die „Grenzfläche“. Die Geometrie auf der Grenzfläche steht, obwohl die Linien krumm sind, in ihren Beziehungen mit der euklidischen im Einklang.

Ferner zeigte Bolyai, dass das Verhältnis der Länge von zwei aufeinanderfolgenden, zwischen zwei Parallellinien eingeschlossenen Grenzbogen proportional der Länge dieser Parallellinien ist. Indem wir diese Länge so wählen, dass das entsprechende Verhältnis der Grenzbogen gleich der Basis der natürlichen Logarithmen wird, erhalten wir eine Strecke, welche er eine „unitas naturalis longitudinum“ nennt. Der Wert dieser Strecke ist nicht aus den Formeln selbst abzuleiten. Die Strecke bildet daher ein Charakteristikum des betreffenden Raumes, d. h. eine Raumkonstante. Sie wurde auch von Lobatschefsky die „Einheitsstrecke“ genannt.

Auch die kartesianischen Koordinaten wandte Bolyai auf Punkte des nichteuklidischen Raumes an, und leitete die gewöhnlichen Formeln ab. Er zeigte, dass man die entsprechenden Formeln für die euklidische Geometrie erhält, wenn man die Einheitsstrecke gleich unendlich in diese Formeln einsetzt. Es ist aber zu bemerken, dass die Koordinaten hier nicht vertauschbar sind, wie es bei der euklidischen Geometrie der Fall ist.

Ferner entdeckte er das Verhältnis zwischen dem Parallelenwinkel und der Länge des entsprechenden Lotes, ein Verhältnis, das den Schlüssel bildet zu der nichteuklidischen Trigonometrie.[1])

Die nichteuklidische Trigonometrie wandte Bolyai zur Berechnung von Flächen und Körpern an und entdeckte so das Verhältnis des Flächeninhaltes eines Dreiecks zu der Summe seiner Winkel (schon Lambert bekannt, siehe oben S. 16). Er entdeckte auch das Dreieck vom grössten Flächeninhalt (schon Gauss bekannt, siehe Brief an W. Bolyai 1799, Stäckel und Engel, S. 219), und dadurch entdeckte er, was oft für sein grösstes Werk gilt, dass es möglich ist, in der nichteuklidischen Geometrie den Kreis zu quadrieren.[2])

Obwohl Bolyai in seinem Titel die Worte einschliesst: „A priori haud unquam decidenda", schliesst er sein Werk mit den Worten: „Superesset denique (ut res omni numero absolvatur), impossibilatem (absque suppositione aliqua), decidendi, num Σ [das euklidische System] aut aliquod (et quodnam) S [das nichteuklidische System] sit, demonstrare: quod tamen occasioni magis idoneae reservatur." Danach würde es scheinen, als ob er noch mehr oder weniger von

---

1) Dies Verhältnis entdeckte Bolyai im Jahre 1823. In dieser Zeit schrieb er an seinen Vater, er sei eben in die wahre Natur seines Problems eingedrungen und habe beschlossen, ein Werk über die Theorie der Parallellinien herauszugeben. Siehe Bonola, S. 88; Engel, S. 376.

2) Siehe Frischauf, „Absolute Geometrie", S. 73—76; Bonola S. 96—102. Lindemann gelang es endlich 1882 zu beweisen, dass der Kreis im euklidischen Raum nicht quadriert werden könne.

der Meinung eingenommen war, die nichteuklidische Geometrie könnte nach alledem vielleicht als unmöglich und die euklidische Geometrie daher als allein gültig streng bewiesen werden. In der Tat versuchte er nachher wieder das Parallelenpostulat direkt zu beweisen, und dachte einmal, es wäre ihm gelungen; aber gerade als er im Begriff war, seine Resultate zu veröffentlichen, entdeckte er seinen Irrtum und nahm Abstand davon.[1])

Bolyais Werk zeichnet sich durch grosse Klarheit und Eleganz seiner Beweisführung und durch das Fehlen metaphysischer Spekulationen aus. Sein Interesse ist mehr als das von Gauss oder Lobatschefsky rein geometrisch. Er hat auch entschieden eine mehr rationalistische Neigung. Die Wahrheit des Parallelenpostulats, denkt er, kann nur auf Grund eines streng rationellen oder mathematischen Beweises behauptet werden. Sonst muss man es als absolut unwahr ganz aufgeben und die Geometrie ist von diesem Mangel frei zu machen. Er scheint einen empirischen Beweis dafür nicht als gültig angesehen zu haben, wie es Gauss und Lobatschefsky taten. Daher scheint er, da die Nützlichkeit dieses Postulats kaum geleugnet werden konnte, die Idee einer möglichen Beweisbarkeit desselben niemals ganz aufgegeben zu haben. Dass er, rationell beanlagt wie er war, das Postulat nicht als ein Axiom ansah, scheint daher lediglich dem Mangel an Einfachheit und Selbstverständlichkeit des Postulates zuzuschreiben gewesen zu sein, die den andern Axiomen eigen zu sein schienen. Diese Tatsache regt die Frage an, in wieweit Einfachheit und Selbstverständlichkeit allein als Kriterien einer axiomatischen Natur genommen werden können. Sicherlich müssen alle Axiome diese Eigenschaften haben, und zwar in höchstem Grade, es ist aber fraglich, ob sie allein genügen, Axiome zu unter-

---

1) P. Stäckel, „Untersuchungen aus der absoluten Geometrie aus Johann Bolyais Nachlass". Math. und Natur. Berichte aus Ungarn Bd. XXIII, S. 280—307: 1902. Bonola S. 102—104.

scheiden. Was einer Person einfach und selbstverständlich scheint, könnte einer andern sehr wohl ganz anders scheinen. Wir haben in der Tat gesehen, dass an dem scheinbaren Fehlen dieser Eigenschaften im Parallelenpostulat lediglich die Form schuld sein könnte, in der Euklid es ausgedrückt hat; und wirklich fanden wir, dass andre Formen möglich sind (S. 9—10 oben), in denen seine Einfachheit und Selbstverständlichkeit sich unmittelbarer zu zeigen schienen. Diese Eigenschaften, die auch reichlich von subjektiven Bedingungen und rein äusserlichen Formen abhängen, dürften daher keine genügenden Kriterien für die Axiome darstellen. Die Frage nach zuverlässigeren Kriterien wird aufgenommen werden, wenn wir zur Erörterung der Kriterien der Apriorität im allgemeinen kommen. (II. Teil, 1. Abschnitt.) Wenn die Axiome nicht rein auf Grund ihrer Einfachheit und Selbstverständlichkeit angenommen werden können, so können sie auch nicht wegen ihres offenbaren Mangels daran verworfen werden. Aus diesem Grunde ist es von einigen Philosophen als eine grosse Inkonsequenz von Seiten der früheren Begründer der nichteuklidischen Geometrie bezeichnet worden, ein Axiom so anzuzweifeln und bei Seite zu schieben, während man den übrigen noch unbedingten Glauben schenkt.[1] In dieser Hinsicht müssen die späteren Theorien von Riemann und Helmholtz, die alle Axiome als fraglich und empirisch hinstellen, als folgerichtiger angesehen werden.

§ 9. Lobatschefsky (1793—1856).

Als der eigentliche Begründer der nichteuklidischen Geometrie wird gewöhnlich Lobatschefsky angesehen, und jedenfalls war er der erste, der eine ausführliche Abhandlung herausgab, die eine neue Geometrie darstellen sollte und nicht einen blossen Versuch, das Parallelenpostulat

1) Siehe Kroman, „Unsere Naturerkenntnis", 1883, S. 168.

zu beweisen.[1]) Zwar war er, wie seine Vorgänger, auf seine Spekulationen durch den Veısuch geführt, dies Postulat zu beweisen, aber wie Gauss überzeugte er sich bald von seiner völligen Unbeweisbarkeit und von der Notwendigkeit,

1) Lobatschefsky's erste Veröffentlichung über diesen Gegenstand ist: „Über die Anfangsgründe der Geometrie". Kasaner Bote 1829—30. Dies war selbst ein Auszug aus einer früheren Abhandlung „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles", vorgetragen am 12. Febr. 1826 in der Sitzung der Abteilung für die physiko-mathematischen Wissenschaften. Diese Abhandlung wurde nirgends veröffentlicht. Die darauf folgenden Publikationen sind: „Imaginäre Geometrie". Kasaner Gelehrte Schriften 1835. „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien". Kasaner Gelehrte Schriften 1835—38. Diese Abhandlung ist eine ausführliche Darstellung seines vollständigen Systems. Alle späteren Werke sind nur Wiedergaben des Inhalts von diesem in verschiedener Form. Diese und seine erste Abhandlung sind aus dem Russischen übersetzt von Friedrich Engel, „N. J. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen . . . . mit einer Biographie des Verfassers". Leipzig 1898. Dies Buch werde ich einfach unter „Engel" zitieren. Spätere Publikationen von Lobatschefsky sind: „Géométrie imaginaire". Crelle Journ., Bd. 17, Heft 4, S. 295—320. Berlin 1837. „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von Nicolaus Lobatschewsky". Selbständiges Werk, F. Finckesche Buchhandlung. Berlin 1840. In Faksimiledruck von neuem herausgegeben von Mayer & Müller. Berlin 1887.

Üersetzungen:

Französich: Houel, „Etudes géométriques sur la théorie des parallèles" par N. J. Lobatschewsky. Paris 1866. Zuerst gedruckt in „Mémoires de la Soc. des sciences phys. et nat. de Bordeaux". T. IV. S. 83—128. Bordeaux 1866.

Englisch: G. B. Halsted, „Geometrical Researches on the theory of parallels" by Nicholaus Lobatchevsky. Austin, Texas. 1. May 1891. 4. Ed. 1. Jan. 1892.

„Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles, par N. Lobatschefsky". Sammlung gelehrter Abhandl. deı Kaiserl. Univ. Kasan 1856. (Französich u. russisch.)

Italienisch: Battaglini, „Pangeometria o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele par N. Lobatschewsky". Giornale di Matematiche. Bd. V, S. 273—336. Neapel 1867.

Deutsch: Heinrich Liebmann, „Pangeometrie von N. J. Lobatschefskij". Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 130.

sich auf die Erfahrung zu berufen, um zu entscheiden, welche von beiden möglichen Geometrien objektiv wahr sei.[1]) Zu Anfang seiner „Neue Anfangsgründe" sagt er (S. 67): „Die Vergeblichkeit der Anstrengungen, die seit

---

1) Lobatschefsky hat sich wahrscheinlich wenigstens schon 1812, wo er seine Lehrtätigkeit zu Kasan begann, mit Versuchen beschäftigt, das Parallelenpostulat zu beweisen. Nach einem alten Collegienheft, das man im Jahre 1894 fand, und das Notizen aus seinen Vorlesungen von 1815—1817 enthält, scheint es, dass er damals drei verschiedene Wege angab, dies Postulat zu beweisen, und dass er ausführlich Legendres Untersuchungen besprach. Zu dieser Zeit stand er also ganz auf der Grundlage Euklids. (Siehe Engel, S. 362.)

Im Jahre 1823 schrieb er ein unveröffentlichtes Lehrbuch der Geometrie, worin er sagt, dass das Parallelenpostulat unbeweisbar sei, und dass einige Mathematiker die Unmöglichkeit, Linien mit Hilfe von Winkeln zu bestimmen, als Grundlage der Geometrie hätten nehmen wollen, dass aber diese Grundlage ungenügend sei. Danach würde es scheinen, als habe er von dieser Zeit an angefangen, seine neue Geometrie zu entwerfen. Man wird sich erinnern, dass Bolyai im Jahre 1823 an seinen Vater schrieb, er sei eben in die wahre Natur seines Problems eingedrungen, da er damals das Verhältnis der Parallelwinkel zu dem entsprechenden Lot entdeckt hatte. (Siehe oben Seite 24, Anmerk. 1.) Daher möchte es scheinen, als wäre die nichteuklidische Geometrie fast gleichzeitig von Bolyai und Lobatschefsky entdeckt, obwohl ihre völlige Unabhängigkeit von einander ohne allen Zweifel ist. Lobatschefsky hat natürlich in Hinsicht der Veröffentlichung die Priorität für sich, wahrscheinlich aber hatte Bolyai seine Ideen etwas vor Lobatschefsky gefasst. (Siehe Engel, S. 376.)

Felix Klein behauptet aber nicht nur, dass Gauss der Begründer der nichteuklidischen Geometrie wäre, sondern dass er auch Lobatschefsky und Bolyai zu ihren Untersuchungen veranlasst habe, ersteren durch seinen Lehrer Bartels, ein Freund von Gauss, der bei ihm bis 1807 war. (Siehe F. Klein, „Nichteuklidische Geometrie I". Vorl. geh. 1889—1890, S. 171, 175.) Engel weist jedoch (378) aus Gauss' Briefen nach, dass letzterer seine Parallelentheorien zu jener Zeit nicht sehr entwickelt hatte. Bartels erhielt nur einen Brief von ihm im Jahre 1808, und der sprach nicht von mathematischen Dingen. Nach diesem erhielt Bartels nach seiner eigenen Aussage keinen bis 1821, als er schon in Dorpat war, nachdem er Kasan in demselben Jahre verlassen hatte. Noch andere Gründe sind von Engel vorgebracht, die es höchst unwahrscheinlich machen, dass Lobatschefsky oder Bolyai überhaupt von Gauss beeinflusst waren. Daher haben wir die bemerkens-

Euklids Zeiten während des Verlaufs zweier Jahrtausende gemacht worden sind, erweckte in mir den Verdacht, in den Begriffen selbst möchte noch nicht die Wahrheit liegen, die man hat beweisen wollen und zu deren Bestätigung, wie bei andern Naturgesetzen, nur Versuche dienen können, so zum Beispiel astronomische Beobachtungen." Seine philosophischen Ansichten waren daher denen von Gauss sehr ähnlich. Mit ihm erkannte er, dass, wenn der wirkliche Raum von dem euklidischen verschieden wäre, er es nur sehr wenig sein könnte. Um diesen Unterschied experimentell zu bestimmen, würde es daher notwendig sein, sehr grosse Dreiecke auszumessen, solche, wie sie durch die Parallaxen entfernter Sterne gegeben sind.[1]) Wenn die Parallele zu einer gegebenen Linie einen spitzen Winkel bildet mit der auf diese Linie gefällten Senkrechten, dann muss ein unendlich entfernter Stern eine positive Parallaxe haben. Unter den Sternen muss es eine gewisse kleinste Parallaxe geben. Wir können dieses Minimum sicher als kleiner annehmen, als die kleinste gemessene Parallaxe. Lobatschefsky nahm, indem er sich auf gewisse Messungen, die in Frankreich[2]) ausgeführt waren, verliess, die Parallaxe des Sirius als 1,24″ an. Auf Grund dieser Annahme berechnet er (S. 23), wenn a der Durchmesser der Bahn der Erde ist, dann $a < 0{,}000\,006\,012\ k$, wo **k** die Einheitsstrecke ist,

---

werte Tatsache, dass die nichteuklidische Geometrie fast gleichzeitig von vier unabhängigen Gruppen von Forschern entdeckt wurde: Gauss, Schweikart und Taurinus, Lobatschefsky, Bolyai, nachdem sie vorher schon von Saccheri und Lambert entdeckt worden war; im ganzen also fünf unabhängige Gruppen von Entdeckern.

1) Dieser Vorschlag war schon von Schweikart gemacht, aber nirgends veröffentlicht worden, daher wurde er erst viel später bekannt. (Siehe S. 20, Anmerk.)

2) Aus einer Abhandlung: „Mémoire sur la détermination de la parallaxe . . des étoiles au moyen d'une nouvelle méthode d'occultations artificielles, par M. le comte de d'Assas-Montdardier . . ." Steht in der Connaissance des tems pour l'an 1831. Paris 1828. Harzer in Kiel sagt: Das beschriebene Verfahren ist durchaus unbrauchbar. (Siehe Engel, S. 248, Anmerkungen.)

wie oben bei Bolyai definiert (S. 23).[1]) Daher würde der Erdbahndurchmesser sehr klein sein im Vergleich zu dieser Einheitsstrecke, die 140000 mal grösser ist. Lobatschefsky berechnete auch bei der obigen Annahme (S. 23), dass in einem gleichseitigen Dreieck, in dem die Länge der Seiten dem Erdbahndurchmesser gleich wäre, die Differenz der Summe der Winkel von zwei rechten Winkeln 0″,000003727 betragen, mithin ausserordentlich klein sein würde.[2]) Lobatschefsky schliesst dann diese Betrachtung mit den Worten: „Hiernach kann man ferner unmöglich behaupten, dass die Annahme, das Mass der Linien sei von den Winkeln unabhängig, eine Annahme, die viele Geometer als eine unbedingte Wahrheit haben annehmen wollen, die keines Beweises bedürfe, dass diese Annahme sich möglicherweise noch bevor wir die Grenzen der uns sichtbaren Welt überschreiten, als merklich falsch herausstellen könnte.

„Andererseits sind wir ausser stande zu begreifen, was für eine Verbindung von Dingen in der Natur bestehen könne, die in dieser so verschiedenartige Grössen wie Linien und Winkel verknüpfte. Daher ist es sehr wahrscheinlich, dass die euklidischen Sätze ganz allein wahr sind, obgleich sie für immer unbewiesen bleiben werden.“

„Wie das auch sein mag, die neue Geometrie, für die nunmehr hier der Grund gelegt ist, kann, wenn sie auch in der Natur nicht besteht, nichtsdestoweniger in unserer Vorstellung besteht, und wenn sie auch bei wirklichen Messungen ausser Gebrauch bleibt, so eröffnet sie doch ein neues, weites Feld für die Anwendung von Geometrie und Analysis auf einander“ (S. 24).

Tatsächlich waren keine von den Sternparallaxen zu Lobatschefskys Zeit wirklich bekannt, und die von ihm für

---

1) In dem Lobatschefskyschen Ausdrucke kommt die Grösse **k** nicht vor. Das kommt lediglich davon, dass Lobatschefsky alle seine Resultate als schon in Einheitsstrecken ausgedrückt betrachtet.

2) In dem Originaltext ist er falsch als 0,0003727 angegeben. Siehe Engel, S. 250, Anmerkung.

den Sirius angenommene ist viel zu gross. Die erste Parallaxe, die gemessen werden sollte, war die des Sternes 61 Cygni, die von Bessel in den Jahren 1837—40, beträchtlich nach der Zeit von Lobatschefskys Abhandlungen ermittelt wurde. Diese Parallaxe (durch spätere Beobachtungen berichtigt) beträgt nur 0″,45. Die des Sirius beträgt, wie jetzt bekannt, nur 0″,39, weniger als ein Drittel von dem, was Lobatschefsky annahm. Die grösste bekannte Parallaxe, die von α Centauri, beträgt nur 0″,75, ist also noch viel kleiner als die von Lobatschefskys angenommene Parallaxe. Die kleinste bis 1889 gemessene ist die des Sternes 1830 Groombridge, die 0″,045 beträgt.[1]) Schwarzschild[2]) hat kürzlich für die Parallaxe 0″,05 berechnet, dass die Einheitsstrecke 2000000 mal der Erdbahndurchmesser sein würde, das ist mehr als das vierzehnfache von dem, was Lobatschefsky dafür herausgerechnet hatte.

Daher scheint Lobatschefskys Schlussfolgerung, seine Geometrie fände wahrscheinlich keine Anwendung auf die Natur, sondern sei nur eine interessante Anwendung von Geometrie und Analysis aufeinander, und die euklidischen Sätze wären nach alledem vielleicht allein richtig, durch die genaueren neueren Messungen wesentlich bestärkt, und künftige Untersuchungen werden diese Schlussfolgerung wahrscheinlich nur noch mehr bestärken.

Doch zu welcher Ausdehnung immer verfeinerte Messungsarten das Gebiet des Messbaren erweitern mögen, das Gebiet des Unmessbaren wird in dieser Beziehung immer unendlich bleiben. Daher sind die neueren Mathematiker weit davon entfernt, Lobatschefskys Schlussfolgerung anzunehmen und seine Geometrie bei Seite zu setzen wegen der ungünstigen Evidenz astronomischer Messungen. Es bleibt für diese immer noch Platz genug

1) Revue d'astronomie 1889.

2) Schwarzschild, „Über das zulässige Krümmungsmass des Raumes". Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Bd. XXXV, S. 337—347. 1900.

auf dem unendlichen Gebiet, das ausserhalb des Bereiches unserer Messinstrumente liegt.

Lobatschefskys Hauptziel aber war, neue und solidere Grundlagen für die Geometrie zu schaffen, besonders sie von der Abhängigkeit von dem Parallelenpostulat zu befreien. Wie Bolyai wünschte er eine neue Geometrie aufzustellen, die von diesem Postulat unabhängig wäre, eine allgemeinere also, die die Euklidische als einen besonderen Fall einschlösse. Daher nannte er seine neue Geometrie, obwohl er sie zuerst „imaginäre" genannt hatte, nachher „Pangeometrie". (1854. Siehe Verzeichnis von Lobatschefskys Werken, oben S. 27, Anmerk.) So sagt er ziemlich zu Anfang der Anfangsgründe: „In der Tat, wer wird nicht zugestehen, dass keine mathematische Wissenschaft mit so dunklen Begriffen begonnen werden darf, wie die sind, mit denen wir, nach Euklids Vorbilde, die Geometrie beginnen, und dass nirgends in der Mathematik ein solcher Mangel an Strenge geduldet werden darf, wie man ihn in der Theorie der Parallellinien hat zulassen müssen?" (Siehe Engel, S. 1.) Das Prinzip, das ihn bei seinen Reformen leiten soll, drückt er dann folgermassen aus:

„Die ersten Begriffe, mit denen eine Wissenschaft, welche es auch sei, beginnt, müssen klar und auf die kleinste Zahl zurückgeführt sein . . . . Begriffe dieser Art werden durch die Sinne erworben; auf angeborene darf man sich nicht verlassen." (Anfangsgründe § 1, Engel, S. 2.) In der Einleitung zu seiner Abhandlung „Neue Anfangsgründe", sagt er weiter: „Ohne Zweifel werden immer die Begriffe zuerst gegeben sein, die wir in der Natur durch Vermittelung unserer Sinne erwerben." (Engel, S. 81.)

Daher kommt Lobatschefsky zu dem Schluss, dass nur Begriffe, die empirischen Ursprungs sind, für die Geometrie tauglich sein können, da er, indem er das Apriori mit dem Angeborensein identifiziert, nicht sehen kann, wie irgend welche anderen Begriffe von Nutzen sein können. Die Überzeugung von dem empirischen Ursprung der geo-

metrischen Begriffe ist daher die Grundlage, auf die seine ganzen Spekulationen gegründet sind, und nicht wie gewöhnlich behauptet wird, ein Resultat derselben.

So sind also Lobatschefskys neue Grundlagen für die Geometrie mindestens bedenklich. Als sein Hauptverdienst muss angesehen werden, dass er die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulates ausser Zweifel setzte. Er entwickelte nicht nur die neue Geometrie in aller wünschenswerten Vollständigkeit und wies nicht nur nach, dass sie keinen Widerspruch enthalte, soweit er sie ausgeführt hatte, sondern ihm gelang auch der Nachweis, dass sie keinen Widerspruch enthalten könne. Denn nachdem er die Gleichungen, die die Abhängigkeit zwischen den Winkeln und den Seiten eines geradlinigen Dreiecks in der nichteuklidischen Geometrie zeigen, und auch dieselben Gleichungen für sphärische Dreiecke entwickelt hatte, wies er nach, dass die ersteren einfach dadurch in die letzteren verwandelt werden könnten, dass man die Seiten imaginär macht, d. h. durch Multiplikation mit $\sqrt{-1}$. Da in allem Weiteren seine Geometrie analytisch aus diesen Gleichungen abgeleitet wird, so folgt daraus, dass die gewöhnliche Geometrie, die sphärische und die neue Geometrie immer in Übereinstimmung miteinander sein müssen. Die nichteuklidische Geometrie kann keinen Widerspruch enthalten, ohne dass auch die euklidische einen solchen in sich schliesst.[1]) (Anfangsgründe Schluss. Engel, Seite 65.)

Aus der Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulates folgt indes nicht, dass letzteres oder eine gleichwertige Form von ihm eine blosse willkürliche Annahme sei (wie Lobatschefsky so oft nachdrücklich hervorhebt) und dass es daher unberechtigt sei, bis es empirisch bestätigt ist. Diese Ansicht setzt voraus, dass seine nicht-axiomatische Natur schon bewiesen ist. Da Lobatschefsky diese nicht bewies, noch daran dachte, sie zu beweisen, müssen seine

1) Vgl. Poincaré, la science et l'hypothèse, S. 58.

Gründe, dies Postulat zu verwerfen, während er die anderen Postulate beibehielt, als unzureichend angesehen werden. Die nichtaxiomatische Natur des Postulates scheint in der Tat immer nur eine rein subjektive Überzeugung bei den Metamathematikern gewesen zu sein und nicht eine Sache wirklicher Erkenntnis oder des Beweises. Die Unzulänglichkeit der euklidischen Grundlagen und das Bedürfnis einer weiteren empirischen Unterstützung ist daher nicht, wie so oft behauptet wird, durch die nichteuklidische Geometrie bewiesen, sondern sie ist die Voraussetzung, worauf letztere sich gründet, aus der sie erwachsen ist. Daher stellt sich heraus, dass es nicht so sehr die euklidische, als die nichteuklidische Geometrie ist, die einer genügenden Begründung ermangelt, — ein merkwürdiger Umstand bei einer Theorie, deren Hauptziel ist, die vermeintlichen Fehler Euklids zu heilen und neue und solidere Grundlagen für die Geometrie zu schaffen.

Lobatschefskys Werke wurden bei seinen Lebzeiten fast ganz unbeachtet gelassen. Selbst sein alter Lehrer Bartels beurteilte sie mehr als interessante geistreiche Spekulationen, denn als ein die Wissenschaft förderndes Werk.[1]) Die einzige Anerkennung, die ihm bei Lebzeiten zu teil wurde, kam von Gauss, der ihn im Jahre 1842 zum korrespondierenden Mitgliede der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften[2]) machte. Aber obwohl Gauss oft in seinen Briefen Lobatschefsky lobte, hat er seinen Namen niemals in einem veröffentlichten Werke erwähnt, sodass letzterer nur verhältnismässig wenigen Mathematikern bekannt war, bis zur Veröffentlichung des Briefwechsels von Gauss (1860 bis 63) und bis zur zweiten Ausgabe von Baltzers „Elemente" (1867), durch die, wie wir oben gesehen haben (S. 19), die nichteuklidische Geometrie zuerst allgemein bekannt wurde.

Während Bolyais Methode fast ganz geometrisch war, war die Lobatschefskys durchaus analytisch. Er

1) Siehe Engel, S. 381.
2) a. a. O., S. 398—399.

entwickelte sehr ausführlich die trigonometrischen Formeln der neuen Geometrie und wandte sie auf die Bestimmung von Flächen und Körpern und auf viele andere Probleme an. Seine Werke sind noch jetzt die ausführlichsten und massgebendsten auf diesem Gebiet.

Auf den ersten Blick scheint es seltsam, dass die Methode des mehr rational beanlagten Bolyai geometrisch war, also mehr direkt intuitiv, während die des mehr empirisch beanlagten Lobatschefsky analystisch, also mehr abstrakt formalistisch. Doch werden wir in der Folge sehen, dass die Geometrie im gleichen Verhältnis, wie sie empirisch wurde, formalistisch und unanschaulich wurde.

3. Abschnitt.
Zweite Periode.
Riemann, Beltrami, Helmholtz.

§ 10. Riemann (1826—1866).

Eine zweite Periode in der Geschichte unseres Gegenstandes wurde eingeleitet durch Riemanns berühmte Abhandlung „über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen". Diese Abhandlung wurde vom Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Kolloquium mit der philosophischen Fakultät zu Göttingen am 10. Juni 1854 vorgetragen, wurde aber erst veröffentlicht nach Riemanns Tode von Dedekind im 13. Bd. der Abh. der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen[1]) 1867.

---

1) Auch gedruckt in: Gesammelte Werke, S. 254—268, herausgegeb. von Dedekind. Leipzig 1876. Die Zitate in dem Text beziehen sich auf diese Ausgabe. Eine sehr tüchtige Darlegung und Kritik dieser Abhandlung gibt Stallo, „Concepts and theories of modern physics". Chap. XIV, S. 248—259, 4. Ed. 1900. Siehe auch Russell, „Foundations of Geometry". S. 13—22, and S. 63—70. An der ersten Stelle wird die Abhandlung mathematisch, an der zweiten philosophisch erörtert.

Riemann war ein Lieblingsschüler von Gauss, bei dem die Abhandlung eingereicht war und der sie sehr bewunderte.[1]) Diese Abhandlung bildet tatsächlich die Grundlage der modernen metageometrischen Theorien. Klein sagt darüber:[2]) „Obwohl die Arbeit nicht umfangreich ist, ist sie doch von grundlegender Bedeutung geworden, man kann wohl behaupten, dass jeder Mathematiker, der die moderne Entwicklung unserer Wissenschaft verstehen will, diese Schrift eingehend studiert haben muss." Es wird daher nötig sein, auf den Gedankengang dieser Schrift etwas genauer einzugehen.

Riemann meint, dass die Dunkelheit, die von Euklids Zeit bis auf Legendre herab in der Geometrie vorgeherrscht hat, dem Umstand zuzuschreiben sei, dass „der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb". (Ges. Werke, S. 254.) Und so sagt er: „Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu konstruieren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Tatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse bestimmen lassen. — — . . . Diese Tatsachen sind wie alle Tatsachen nicht notwendig, sondern

1) Siehe den Anhang zu Riemanns „Gesammelte Werke" von Dedekind, S. 517.

2) Klein, Vorlesungen, Nicht-Euklidische Geometrie, Bd. I, S. 206.

nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hiernach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbargrossen, als nach der Seite des Unmessbarkleinen urteilen."[1]) Daher ist nach Riemann der Raum nur eine Art, unter anderen beigeordneten Arten eines allgemeineren Begriffes, „verschiedener Bestimmungsweisen" fähig. Der Raum ist nach Riemann nur richtig zu verstehen durch Unterordnung unter einen solchen Begriff. Die Aufgabe des Mathematikers ist es, zu untersuchen, welches die verschiedenen denkbar möglichen „Bestimmungsweisen" sind, und dann empirisch nachzusehen, welche davon in dem Raum unserer Erfahrung zutreffen.

Wenn man aus der Tatsache, dass die Grundlagen der Geometrie nicht analytisch abgeleitet werden können, schliesst, dass sie deshalb empirischen Ursprunges sein müssen, so muss jedoch bemerkt werden, dass dabei schon vorausgesetzt ist, dass ihre axiomatische Natur ausgeschlossen ist. Durch diese Ausschliessung hat Riemann schon seinen Empirismus ausgesprochen, welcher, wie der der anderen Begründer der Metageometrie, darum nicht ein Resultat, sondern eine Voraussetzung seiner mathematischen Theorien ist. Diese Tatsache wird von seinem Anhänger und Verfechter Erdmann[2]) zugegeben. Letzterer sagt: „Riemann hat seiner empirischen Überzeugung gleich in den einleitenden Sätzen Ausdruck gegeben, die den Plan der Unter-

---

1) Das heisst, die genaue Geltung dieser Tatsachen und die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtungen sind Hypothesen. Daher glaube ich, Riehls (Der Philosophische Kritizismus, Bd. II, S. 169) Einwand, Riemann hätte nicht von den Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, sondern lieber von den Tatsachen sprechen sollen, ist hinfällig.

2) Erdmann, „Die Axiome der Geometrie" (S. 106 und 107). Leipzig 1877.

suchung skizzieren." Und dieser Empirismus, sagt Erdmann, rührt von Herbart her, zu dessen psychologischer Theorie, dass die Raumform ohne jede spezifische apriorische Nötigung aus der Reihenform entsteht, Riemann sich ausdrücklich bekennt.[1]) Ohne diese Voraussetzung, sagt Erdmann, — „würde der Schluss von der Möglichkeit verschiedener Räume mit verschiedenen Massbeziehungen auf die empirische Natur unserer Raumvorstellung keine Gültigkeit haben. Die Anhänger einer nativistischen Theorie könnten immer noch einwenden, daraus, dass die geometrischen Axiome sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, dürfte nur gefolgert werden, dass die Eigenschaften unseres Raumes lediglich durch die Anschauung gegeben würden, deren Apriorität oder Aposteriorität garnicht in Frage komme". Riemanns Empirismus hat also seinen Ursprung in psychologischen Untersuchungen und ist eine notwendige Voraussetzung seiner mathematischen Theorien.[2]) Diese Zuhilfenahme physiologischer und psychologischer Untersuchungen ist etwas ganz gewöhnliches geworden bei den Anhängern der Metageometrie, die zu vergessen scheinen, dass ihre Theorien dadurch keine grössere Gewissheit erlangen können, als die, welche jene Theorien selbst besitzen und die oft sehr klein ist.

Riemann fährt fort (S. 255): „Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer anderen

---

1) Siehe Riemann, Gesammelte Werke, S. 475 f.

2) So zum Beispiel Heymans, Gesetze und Elemente des wiss. Denkens, Bd. I, S. 209, 1890. Auch Riehl, Der philosophische Kritizismus, Bd. II, S. 175, sagt, es sei ein Vorurteil, anzunehmen, dass, was nicht von reinen Grössenbegriffen abgeleitet werden kann, aus reiner Erfahrung abgeleitet werden müsse. Da er jedoch glaubt, dass sein rein logischer Ursprung dadurch bewiesen wird, so hat er auch schon seine axiomatische Natur ausgeschlossen, wahrscheinlich, weil, wie er Kants reine Anschauung verwirft, er meint, dass es keine andere mögliche Quelle dieser Wahrheiten gibt.

ein stetiger Übergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder diskrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im ersteren Falle Punkte, im letzteren Elemente dieser Mannigfaltigkeit.“ Von der ersten Art der Mannigfaltigkeiten, sagt Riemann, sind eine Menge zu finden; von der zweiten wahrscheinlich nur die Farben- und Tonsysteme ausser unserem Raum (S. 256).[1]) Teile einer diskreten Mannigfaltigkeit werden verglichen durch Zählung, die einer stetigen durch Messung (S. 256).

Riemann meint, dass verschiedene Arten von Beziehungen mit verschiedenen Massverhältnissen zwischen den Elementen einer Mannigfaltigkeit bestehen können, wie sie durch die analytische Gleichungen gegeben sind, die sie ausdrücken. A priori gibt es natürlich keine Grenze für die Anzahl der denkbaren Beziehungen, die bestehen könnten. Es ist nur eine Sache der möglichen Kombination der Symbole. Riemann findet aber, dass eine Beschränkung gemacht werden kann, da diese Massverhältnisse durch Messung bestimmt werden müssen. Nun, — „das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Grösse als Massstab für die andere fortzutragen“ (S. 256). Diese Beschränkung auf messbare Mannigfaltigkeiten ist nicht absolut notwendig, Riemann meint aber, es wird

1) Dieser Gedanke ist sehr ausführlich entwickelt von B. Erdmann, Die Axiome der Geometrie, Leipzig 1877, S. 40—44, scharf kritisiert von Weissenborn, Über die neueren Ansichten von Raum und von den geometrischen Axiomen, Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil., Bd. II, 1878, S. 320 und von Stallo, a. a. O., S. 255—257. Ersterer sagt, wir könnten nach demselben Prinzip dem Raum als Beispiel einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zur Seite stellen den Betrag des Einkommens aus einem bestimmten Kapital, da er das Ergebnis ist aus drei Variabeln: Kapital, Zinsfuss und Zeit. Stallo weist auch auf die Schnelligkeit eines Eisenbahnzuges auf einer geraden Bahn, da diese das Ergebnis ist aus der bewegenden Kraft der Maschine, des Gewichts des Eisenbahnzuges und des Gefälles des Bahngleises; oder auf die Verflüchtigung einer Flüssigkeit oder auf die Leistungsfähigkeit eines Arbeiters etc.

angemessen sein, uns für jetzt auf solche Mannigfaltigkeiten zu beschränken, da unser Raum unzweifelhaft einer ist, wo Messung möglich ist. Er erklärt dann, was er mit einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit meinte (S. 257), indem er sie nach der Weise Herbarts aus der Reihenform konstruierte. Dann fährt er fort (S. 259): „Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede messbar sei". Russell sagt in seinen „Foundations of Geometry" (S. 16): „One would be glad to know what other ways are possible" und findet sich gänzlich ausser Stande, sich irgend einen anderen Weg zu denken. Indess ermöglicht wohl diese Annahme Riemann, den analytischen Ausdruck für die Entfernung zwischen zwei Punkten festzustellen als das wesentliche Merkmal, das eine Mannigfaltigkeit von der andern unterscheidet, und die ganze Untersuchung auf die möglichen Formen zu vereinigen, die dieser Ausdruck annehmen kann. Bei verschiedenen weiteren Annahmen glaubt er sich auf den Fall beschränken zu dürfen, in welchem der Ausdruck für das Linienelement **ds** gleich ist der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Funktion zweiten Grades der Grössen **dx**, in welcher die Koeffizienten stetige Funktionen der Grössen **x** sind (S. 260). Für den besonderen Fall unseres eigenen Raumes führt dieser Ausdruck zurück auf die wohlbekannte Form, die sich auf den Pythagoreischen Lehrsatz gründet, $ds = \sqrt{\Sigma dx^2}$. Eine solche Mannigfaltigkeit nennt Riemann „eben". Die anderen Arten haben ein „Krümmungsmass".

Die Idee des „Krümmungsmasses", welche den Kernpunkt der Riemannschen Abhandlung bildet, hat zweifellos Riemann zu ihrer Abfassung angeregt. Alles was wir bis jetzt berichtet haben, ist nur die Einleitung zu diesem

Hauptpunkt gewesen. Nachdem Riemann die mathematische Form entdeckt hatte, die ein solches „Krümmungsmass“ haben würde, suchte er wahrscheinlich unklarer Weise eine Art transscendentalen Beweises von seiner Notwendigkeit zu geben. Daher die sehr unsichere und allgemeine Art und Weise, wie er mit der augenscheinlich willkürlichen Einführung einer konkreten Einschränkung nach der andern beginnt, bis man schliesslich unerwartet auf dieses „Krümmungsmass“ kommt. Um eine Idee davon zu bekommen, was Riemann damit meinte, wird es notwendig sein, eine etwas längere Abschweifung zu machen über die Entwicklung der mathematischen Krümmungstheorie von Gauss an.

Die Krümmung eines Bogens ist eigentlich die Grösse seiner Abweichung von der geraden Richtung. Sie wird dargestellt durch den Winkel, um welchen die Tangente des Bogens sich dreht, wenn der Berührungspunkt derselben eine bestimmte Strecke des Bogens durchläuft. Die mittlere Krümmung dieser Strecke ist gleich diesem Winkel dividiert durch die Länge der Strecke oder gleich dem Winkel zwischen den Normalen in den Berührungspunkten, geteilt durch die Länge der Strecke, wobei der Winkel gemessen wird am Kreis mit dem Radius 1, dessen Mittelpunkt im Schnittpunkt der Normalen liegt. Da jedoch die Krümmung im allgemeinen nicht konstant sein, sondern sich von Punkt zu Punkt ändern wird, werden unsere Resultate desto genauer, je kürzer wir die Strecke nehmen, und absolut genau nur, wenn wir diese Strecke unendlich klein nehmen. Nennen wir diese Strecke **ds**, so wird die wirkliche Krümmung k, in einem gegebenen Punkt, $k = \frac{d\varphi}{ds}$ sein, wo $d\varphi$ der Winkel zwischen zwei unendlich nahen Normalen ist. Wenn $d\varphi$ in Kreismessung gemessen wird, dann ist $d\varphi = \frac{ds}{r}$, daher $k = \frac{1}{r}$. Dann ist die wirkliche Krümmung in irgend einem Punkt einer Kurve der reziproke Wert des Radius eines

gewissen Kreises. Es kann analytisch nachgewiesen werden, dass dieser Kreis mit drei unendlich nahen Punkten der Kurve zusammenfällt, so dass man sagen kann, der Kreis habe dieselbe Krümmung in diesem Punkt als die Kurve. So wird der Kreis die massgebende Kurve, nach der die Krümmung aller anderen gemessen wird, wozu er wegen seiner konstanten Krümmung ganz besonders geeignet ist.

Nun kann die Krümmung einer Fläche analog aufgefasst werden als die Grösse ihrer Abweichung von einer Ebene. Da jedoch eine Fläche eine zweidimensionale Ausdehnung besitzt, so müssen wir ihre Abweichung von der Ebene nach allen Richtungen hin in Betracht ziehen, da sie in den verschiedenen Richtungen verschieden sein kann. Es war das Verdienst von Gauss, ein diese Anforderungen befriedigendes „Krümmungsmass“ für Flächen geliefert zu haben, in seiner klassischen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ (Bd. VI der Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen 1827; Deutsche Übersetzung in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 5, herausgegeben von A. Wangerin mit wertvollen Anmerkungen). Wir betrachten einen kleinen von irgend einer Kurve begrenzten Teil der Fläche um einen gegebenen Punkt herum und errichten in allen Punkten der begrenzenden Kurve die Normalen zur Fläche. Dann versteht Gauss unter der „Totalkrümmung“ oder der „Gesamtkrümmung“ des betrachteten Teiles der Fläche den Abschnitt der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1, den man erhält, wenn man von dem Mittelpunkte der Kugel parallele Radien zu den Normalen zieht (Gauss, a. a. O., Art. 6). Das Verhältnis dieser „Gesamtkrümmung“ zu dem Flächeninhalt des betrachteten Teiles der Fläche, wenn beide unendlich klein werden, nennt Gauss die „Spezifische Krümmung“ oder das „Krümmungsmass“ in dem gegebenen Punkt. Dies ist das berühmte Gausssche Krümmungsmass, das später in der Mathematik so wichtig geworden ist. Je nachdem die Radien der Einheitskugel in demselben oder dem entgegen-

gesetzten Sinne den Perimeter der Kurve durchlaufen, wie die Normalen, wird das Krümmungsmass als positiv oder negativ bezeichnet.

Schon Euler hat gezeigt (Mém. de l'Acad. de Berlin, T. XVI, 1760), dass, wenn geodätische[1]) oder geradeste Linien auf der Fläche in allen Richtungen durch den gegebenen Punkt gezogen werden, ihre Krümmung im allgemeinen verschieden sein wird. Wenn daher die Fläche ganz konvex ist, wird eine Linie darunter sein, deren Krümmung in dem gegebenen Punkt am grössten, und eine andere, deren Krümmung am kleinsten ist. Wenn die Fläche konvex-konkav ist, so muss eine Linie die grösste Konvexität und eine andere die grösste Konkavität zeigen. Die Richtungen dieser Linien werden die Hauptrichtungen genannt und stehen rechtwinklig zu einander. Ihre Krümmungsradien in dem gegebenen Punkt werden die Hauptkrümmungsradien der Fläche in diesem Punkt genannt. Wenn man nun ein rechtwinkliges Element der Fläche betrachtet, dessen Seiten parallel zu den Hauptrichtungen sind, kann gezeigt werden, dass das Gauss'sche Krümmungsmass in diesem Punkt einfach der reziproke Wert des Produkts der beiden Hauptkrümmungsradien ist (Gauss a. a. O., Art. 8). Wenn die beiden Hauptkrümmungsradien in derselben Richtung liegen, ist das Krümmungsmass positiv, wenn sie in entgegengesetzten Richtungen liegen, ist das Krümmungsmass negativ. So teilen sich alle Flächen in zwei Klassen, solche, deren Krümmungsmass positiv ist, die ganz konvexen Flächen, und solche, deren Krümmungs-

---

1) Geodätische Linien einer gekrümmten Fläche sind die Linien, deren Hauptnormalen überall zusammenfallen mit den Normalen der Fläche. Die Hauptnormalen sind die Normalen, in denen die Krümmungsradien liegen. Die Krümmung dieser geodätischen Linien ist daher überall gleich der Krümmung der Fläche in den gegebenen Punkten in der Richtung der Linien. Sie sind daher die geradesten Linien der Fläche, und im allgemeinen auch, obwohl nicht immer, die kürzesten Linien derselben. Auf Flächen von konstanter Krümmung sind die geodätischen Linien immer die kürzesten.

mass negativ ist, die konvexkonkaven oder sattelförmigen Flächen.[1])

Diese Definition der Krümmung der Flächen hat zur Folge, dass Flächen, deren geodätische Linien zum Teil Gerade sind, das Krümmungsmass Null haben. Demnach haben Zylinder und Kegel das Krümmungsmass Null und werden wie die Ebene als Flächen, die keine Krümmung haben, betrachtet. Da Zylinder und Kegel durch Rollen einer Ebene gebildet werden, so können sie als Ebenen angesehen werden, die in eine gewisse Gestalt gebogen sind. Zwischen Krümmung und Biegung wird also ein Unterschied gemacht. Gauss hat mathematisch nachgewiesen, dass das Krümmungsmass eine besondere Eigenschaft jeder Fläche ist und nicht geändert wird, wenn die Fläche ohne Dehnung oder Zerreisung gebogen wird. So können Flächen die verschiedensten Formen und doch dasselbe Krümmungsmass haben, wenn nur die eine Form

1) Diese Einteilung der Flächen wird beanstandet von A. Kirschmann, „Die Dimensionen des Raumes", Wundts Philosophische Studien. Bd. XIX, 1902, S. 326, da er meint, ob ein Ding positiv oder negativ genannt wird, müsste lediglich von seiner Stellung abhängen mit Rücksicht auf einen willkürlich gewählten Null-Punkt. Dies ist aber nur richtig bei der Messung von Lineargrössen, nicht im allgemeinen in der Mathematik. Es ist nicht einmal richtig in der Zahlenreihe, da es uns nicht freisteht, alle Zahlen unter einer willkürlich gewählten als negativ anzusehen, sondern nur die unter der festbestimmten Zahl Null. Kirschmann beanstandet auch, den Zylinder und den Kegel Flächen von keiner Krümmung zu nennen. Dies sollte uns, sagt er, gleich misstrauisch machen gegen das Gauss'sche Krümmungmass. Der einzige Einwand jedoch, der gegen das Gauss'sche Krümmungsmass erhoben werden kann, ist der, dass dieses Mass nicht der Vorstellung des gewöhnlichen Menschen von der Krümmung entspricht. Sicherlich aber braucht der Mathematiker sich durch solche Erwägungen nicht binden zu lassen. Für ihn kommt nur die unter den Mathematikern abgemachte Definition in betracht und darin muss den Mathematikern vollständig freie Hand gelassen werden. Das Gauss'sche Krümmungsmass ist in der Tat keineswegs das einzige, das vorgeschlagen ist. Es ist jedoch dasjenige, das schliesslich die allgemeine Billigung der Mathematiker gewonnen hat. (Siehe Anmerk. zu A. Wangerins Übersetzung von Gauss, S. 55.)

in die andere durch blosses Biegen ohne Dehnung verwandelt wird, d. h. wenn die eine Form der Fläche abwickelbar ist auf die andere (Gauss, a. a. O., Art. 12). Auch bleiben bei solchem Biegen die Längen aller geodätischen Linien und die Winkel zwischen ihnen dieselben. Dies kann man so ausdrücken, dass die Geometrien auf Flächen, die in allen entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmass haben, dieselben sind, wie verschieden auch diese Flächen gebogen sein mögen. Flächen können also ferner eingeteilt werden in solche, deren Krümmungsmass überall konstant ist, und solche, in denen es von Punkt zu Punkt variiert.

Besonders wichtig ist der Fall derjenigen Flächen, deren Krümmungsmass überall konstant ist. Die Art, wie das Krümmungsmass solcher Fläche durch Biegen nicht verändert wird, ist von Klein sehr gut erläutert. (Siehe Nicht-Euklidische Geometrie, Bd. I, S. 183.) Klein sagt: „Denken wir uns nun einmal, ... als Beispiel einer Fläche die Äquatorzone einer Kugel . . . . Wenn wir nun diese Zone aufgeschnitten denken, längs des Bogens eines Meridians, so werden wir leicht im stande sein, die Kugelzone . . . . auseinander zu biegen; wir bemerken dann, dass der Krümmungsradius der Breitenkreise sich vergrössert, dagegen der Krümmungsradius der Meridiankurven kleiner wird. Das Umgekehrte findet natürlich statt, wenn wir die Kugelzone in sich selbst aufrollen . . . .“ In beiden Fällen wird das Produkt der Krümmungen in den beiden Richtungen, d. h. das Krümmungsmass konstant bleiben.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der Flächen von konstanter Krümmung ist, dass sie in sich selbst verschiebbar sind, wie der Kreis und die Kugel, eine Eigenschaft, die sie mit der Geraden und der Ebene gemein haben. Figuren, die auf solche Flächen gezeichnet sind, können auf ihrer Oberfläche verschoben werden, ohne ihre Massverhältnisse zu verändern. Auf allen anderen Flächen können Figuren

nicht verschoben werden, ohne entweder die Länge der Linien oder die Grösse der Winkel zu verändern.

Alles dies unterstützt die Ansicht, dass die Krümmung einer Fläche eine innerliche Eigenschaft von ihr ist, nicht abhängig von irgendwelchen äusseren Umständen. Diese Ansicht wird ferner durch die Tatsache bestärkt, dass Gauss zeigte, dass die Krümmung einer Fläche ausgedrückt werden könnte mittels der Koeffizienten des Ausdrucks für die Länge des Bogenelements einer kürzesten Linie auf der Fläche, also lediglich mittels innerlicher Verhältnisse der Fläche, ohne irgend welche Beziehung auf den umgebenden Raum (Gauss, Art. 19; siehe auch Russell, a. a. O., S. 19). Er zeigte auch, dass auf Flächen von konstanter Krümmung das Krümmungsmass gleich sei der Abweichung der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks von zwei Rechten, geteilt durch den Flächeninhalt des Dreiecks (Gauss, Art. 20; auch Lechalas, a. a. O., S. 12). Daher schien die Krümmung einer Fläche definiert zu werden als eine innere Eigenschaft dieser Fläche, abhängig nur von ihren inneren Massverhältnissen.

Um zu Riemann zurückzukehren, so war gesagt worden, dass das Krümmungsmass die Hauptidee und wahrscheinlich auch die erste Veranlassung seiner Abhandlung ist. Dies Krümmungsmass ist bei ihm eine Verallgemeinerung des Gaussschen Krümmungsmasses für Flächen, besonders der Form desselben, die nur von den inneren Massverhältnissen der Fläche abhängig ist. Das Gausssche Krümmungsmass kann als die analytische Charakteristik angesehen werden, durch die verschiedene Arten von Flächen voneinander unterschieden werden. Es ist der analytische Ausdruck für das, was in der Anschauung ihrer Krümmung entspricht. Wir können daher sagen, dass Flächen durch die Art der Massverhältnisse, die in ihnen möglich sind, analytisch voneinander unterschieden werden. Da nun Riemann die empirische Ansicht angenommen hatte, dass die Massverhältnisse unseres Raumes nicht notwendiger, sondern nur

tatsächlicher Natur seien, dass sie daher ebenso gut hätten verschieden sein können, und dass daher unendlich viele andere Arten dreidimensionaler Räume möglich seien, scheint er geglaubt zu haben, dass ähnliche Betrachtungen auf diese angewandt werden könnten. Die verschiedenen Arten von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten werden auch von einander unterschieden werden durch ihre verschiedenen Krümmungsmasse, die nur die verschiedenen Arten von Massverhältnissen ausdrücken, die in ihnen möglich sind. Dies dreidimensionale Krümmungsmass wird ein analytischer Ausdruck von derselben, aber verallgemeinerten Form sein, wie der für zwei Dimensionen. In diesem Fall wird es in der Anschauung nichts Entsprechendes geben, wie die Krümmung, die dem zweidimensionalen Krümmungsmass entspricht. Es mag passend ein Krümmungsmass genannt werden, nur weil seine analytische Form der von dem zweidimensionalen Krümmungsmass analog ist. Aber es bezeichnet keineswegs eine wirkliche Krümmung. Es ist nur das analytische Merkmal, durch das verschiedene dreidimensionale Mannigfaltigkeiten von einander unterschieden werden. Einen ähnlichen Sachverhalt haben wir bei den Exponenten. x^2 entspricht einem Quadrat in der Anschauung, x^3 einem Kubus; aber x^4 entspricht in der Anschauung überhaupt nichts.

Demgemäss findet Riemann den analytischen Ausdruck für dieses Krümmungsmass in der Annahme, dass es dasselbe Verhältnis zu dem einer Fläche haben wird, wie dies zu der Krümmung einer Linie. Bei der Linie haben wir eine Krümmungsrichtung und einen Krümmungsradius. Bei der Fläche können wir durch einen gegebenen Punkt eine unendliche Anzahl geodätischer Linien ziehen, die alle im allgemeinen verschiedene Krümmung haben. Zwei von diesen, die Hauptkrümmungslinien, genügen jedoch, um durch die Produkte ihrer Krümmungen die Krümmung der Fläche darzustellen. Ähnlich, meint Riemann, wird es bei einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit um einen ge-

gebenen Punkt herum eine doppelt unendliche Anzahl von verschiedenen Richtungen geben, in die zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gelegt werden können, die im allgemeinen verschiedene Krümmungsmasse haben. Drei von diesen in den drei Hauptrichtungen liegenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten genügen indes, das Krümmungsmass der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit zu geben. Und so wird im allgemeinen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ∞^{n-1} Richtungen haben, in die (n — 1)-dimensionale Mannigfaltigkeiten gelegt werden können, die im allgemeinen verschiedene Krümmungsmasse in diesen verschiedenen Richtungen haben. Es werden jedoch $\frac{n(n-1)}{2}$[1] von diesen (n — 1)-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die in ebenso vielen Hauptrichtungen liegen, genügen, um das Krümmungsmass der betreffenden n-dimensionalen Mannigfaltigkeit darzustellen (Riemann, § 2, S. 261—262).

n-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind dann nach Riemann, gerade wie die Flächen, in solche zu klassifizieren, deren Krümmungsmass von Punkt zu Punkt sich ändert, und solche, deren Krümmungsmass überall und in jeder Richtung konstant ist. Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten ist, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen, wie bei der Kugel und dem Kreis. Einen besonderen Fall davon bilden die Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass überall Null ist. Solche Mannigfaltigkeiten nennt Riemann „eben“ wegen ihrer Analogie mit der Ebene, die eine solche Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen ist. Wir können daher unsern Raum als eine stetige dreifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit definieren. So hat Riemann die Stelle, welche unser Raum unter den unendlich vielen Möglichkeiten einnimmt, gefunden.

1) D. h. die Kombinationen von drei Elementen zur zweiten Klasse.

Viele sehen Riemanns Hauptverdienst[1]) darin, dass er so zu einer Definition des Raumes kommt. Von vielen Philosophen[2]) ist darauf hingewiesen worden, dass diese Definition allzusehr an die Subsumptionslogik und die Unzulässigkeit der Annahme, dass der Raum nur durch eine solche Subsumption definiert oder verstanden werden kann, gebunden ist.

n-dimensionale Mannigfaltigkeiten können auch danach klassifiziert werden, je nachdem ihr Krümmungsmass positiv oder negativ ist. Nun entsprechen bei Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung die drei Fälle von positiver, keiner oder negativer Krümmung genau den drei Geometrien von Saccheri und Lambert, d. h. den Geometrien, die sich auf die drei Hypothesen von dem bezw. stumpfen, rechten und spitzen Winkel gründen. Daher wird die Geometrie, die sich auf die Hypothese des stumpfen Winkels gründet, die von Saccheri und Lambert so leicht widerlegt schien, und die von Gauss, Lobatschefsky und Bolyai als unmöglich angesehen wurde, da Legendre bewiesen hatte, dass die Winkelsumme im Dreieck nicht grösser sein könnte, als zwei Rechte, von Riemann als gleichberechtigt angesehen mit den beiden andern Geometrien. Die Erklärung hierfür ist folgende: Die Widerlegungen Saccheris und Lamberts gründen sich auf Euklids Sätze 16 und 17, während Legendres Theorie nur eine Erweiterung von Satz 16 ist. Nun wird in diesen zwei Sätzen Euklids die Unendlichkeit der Geraden vorausgesetzt. Dadurch, dass er auch dies Postulat zusammen mit dem Parallelenpostulat fallen lässt, ist Riemann imstande, dieser Geometrie einen

1) Vergl. Erdmann, „Axiome der Geometrie", S. 82, 83. Wundt, „Logik", Bd. I, S. 502. Riehl, „Der philosophische Kritizismus", Bd. II, S. 85. Reinecke, „Die Grundlagen der Geometrie", Dissertation, Halle 1903, S. 38.

2) Siehe Stallo, S. 254—257. Auch A. Kirschmann, „Die Dimensionen des Raumes", S. 347. Weissenborn, „Über die neueren Ansichten etc.", S. 320.

Platz neben den beiden andern einzuräumen. Darin ist die Gerade nicht mehr unendlich, sondern in sich selbst zurücklaufend, wie ein grösster Kreis auf der Kugel. Dasselbe ist der Fall mit der Ebene, die der Fläche einer Kugel ähnlich ist. Ebenso wird der dreidimensionale Raum in sich zurücklaufend, und ist daher endlich und mit einer sphärischen Fläche von drei Dimensionen zu vergleichen.[1])

Um diesen Begriff eines endlichen Raumes einigermassen zu rechtfertigen und vielleicht die Vorstellung von einem eingeschlossenen oder umgebenden Raume auszuschliessen, unterscheidet Riemann zwischen dem Wort „Unbegrenzt" und dem Wort „Unendlich". Diese Unterscheidung ist sehr gewürdigt worden. Riemann sagt (S. 266): „Dass der Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aussenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes konstruiert werden, und welche sich bei dieser Anwendung fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine grössere empirische Gewissheit, als irgend eine äussere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein konstantes Krümmungsmass zuschreibt, notwendig endlich sein, sobald dieses Krümmungsmass einen noch so

---

1) Der Mathematiker versteht unter einer gewöhnlichen Kugelfläche ein Gebilde von zwei, nicht von drei Dimensionen, weil der Ort eines Punktes auf einer solchen Fläche durch zwei (sphärische) Koordinaten gegeben wird. Er denkt also blos an die Fläche, nicht an den durch sie eingeschlossenen Raum von drei Dimensionen. Eine dreidimensionale Kugelfläche wäre also eine, welche einen vierdimensionalen Raum einschlösse, deren Radius also in der vierten Dimension läge. Als eine solche Fläche wäre, wie wir später sehen werden, der Riemannsche Raum mit positivem Kümmungsmass zu bezeichnen.

kleinen positiven Wert hätte. Man würde, wenn man die, in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zur kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit konstantem, positivem Krümmungsmass, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde und welche folglich endlich ist."

Durch diese Unterscheidung von Unbegrenztheit und Unendlichkeit dachte Riemann vielleicht das Bedenken des gewöhnlichen Menschen zu beruhigen, der an der Unbegrenztheit des Raumes festhält, indem er zeigte, dass die Eigenschaft, in sich selbst zurückzulaufen, auch als eine Art der Unbegrenztheit bezeichnet werden kann. Jene Eigenschaft verletzt also nach Riemann keineswegs den Begriff der Unbegrenztheit des Raumes, also die Möglichkeit, gerade Linien, Ebenen u. s. w. unbeschränkt fortsetzen zu können. Ebenfalls auf der Kugel, meint Riemann, kann man seine Figuren unbeschränkt fortsetzen. Allein hier schreitet man nicht in geraden Linien fort, sondern in krummen, und das ist eben nicht, was der gewöhnliche Mensch unter der Unbegrenztheit des Raumes versteht. Hierunter versteht der gewöhnliche Mensch die Möglichkeit, seine geraden Linien unter Beibehaltung unveränderter Richtung unbeschränkt fortsetzen zu könen. In diesem Sinne ist eine krumme Fläche eben nicht als unbegrenzt zu bezeichnen. Die Unterschiebung der Eigenschaft des in sich selbst Zurücklaufens unter den Begriff der Unbegrenztheit erscheint demnach als durchaus gekünstelt und unberechtigt. Anstatt darin eine feine und aufklärende Unterscheidung zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit zu finden, ist der gewöhnliche Mensch vielmehr geneigt, darin eine Verwechselung der letzteren mit dem Begriff des in sich selbst Zurücklaufens zu erblicken, welche ihm den wirklichen Sachverhalt verschleiert. So viel diese Unterscheidung Riemanns von manchen Seiten Bewunderung gefunden hat, so scheint sie also mehr dazu geeignet, eine irrtümliche

Auffassung zu verbergen, als eine wirkliche Entdeckung aufzuklären. [1])

Fassen wir das Letzte noch einmal zusammen. Der Kernpunkt der Riemannschen Untersuchungen ist die Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses, seine Anwendung auf Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen, wodurch ein Ausdruck zur Charakterisierung dieser Mannigfaltigkeiten geschaffen wird. Dadurch wird es ermöglicht, unseren Raum nach dem Schema der Subsumption zu definieren. Er erscheint als ein besonderer Fall einer ausgedehnten dreifachen stetigen Mannigfaltigkeit mit dem konstanten Krümmungsmass Null. Die beiden Geometrien von Saccheri und Lambert werden gleichwertig mit der euklidischen gesetzt als die Geometrien von Mannigfaltigkeiten, die konstante, resp. positive oder negative oder keine Krümmungsmasse[2]) haben. Farben- und Ton-Mannigfaltigkeiten werden auch Raum-Mannigfaltigkeiten zugeordnet. Alles dies sind Beispiele von stetigen Mannigfaltigkeiten. Aber neben diese stellt Riemann auch die unstetigen, wie z. B. das Zahlensystem und fragt, ob der innere Grund der Massverhältnisse des Raumes diskret oder stetig sei. Das hat in neueren Zeiten zu der Annahme geführt, dass die Stetigkeit keine notwendige Eigenschaft des Raumes sei, und zu der Erfindung von Geometrien angeregt, in denen man die Stetigkeitsannahmen fallen lässt oder wenigstens nicht ausdrücklich erwähnt, — wie die sogenannte „Nicht-Archimedische" und „Nicht-Legendresche" Geometrie.

Was man auch über Riemanns Abhandlung vom philosophischen Standpunkte aus denken mag, sicher enthielt

---

1) Sie gibt Anlass z. B. zu scharfen Einwänden wie der Kirschmanns, der sagt: „So bauen sich grossartige mathematische Theorien .... bei welchen .... oberflächliche Sprachgebrauch eine wesentliche Rolle spielt". Dimensionen des Raumes, S. 361.

2) Diese beiden Geometrien werden jetzt die nichteuklidischen Geometrien im engeren Sinne genannt. Die des spitzen Winkels wird häufig die Lobatschefskysche, die des stumpfen Winkels die Riemannsche genannt. Man spricht auch oft von der Riemannschen Ebene.

sie einen Schatz von überraschend neuen und umwälzenden Ideen. Doch wurde sie von keinem mehr vernachlässigt, als von ihrem Verfasser selbst, der sich die ganze übrige Zeit seines Lebens den mehr praktischen Aufgaben der mathematischen Physik widmete. Obwohl eine seiner frühesten Schriften vom Jahre 1854, wurde sie bei Seite gelegt, und erst nach seinem Tode im Jahre 1868 veröffentlicht.

§ 11. Grassmann.

Die Idee, den Raum als einen besonderen Fall einer allgemeineren Grössenlehre zu behandeln, fähig einer unbegrenzten Anzahl von Dimensionen sowohl, wie verschiedener Massverhältnisse, war schon vor Riemanns Zeit von Herrmann Grassmann im Jahre 1844 in seiner Abhandlung: „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik“ (II. Auflage Leipzig 1878) geäussert worden. Dies Werk ist umso bemerkenswerter, als Grassmann offenbar nichts von den Arbeiten von Gauss, Lobatschefsky und Bolyai wusste. Daher kommt auch das Krümmungsmass, das bei Riemann eine so wichtige und aufklärende Rolle spielt, bei Grassmann nicht vor. Obwohl seine allgemeine Idee fast dieselbe ist, wie die von Riemann, so finden wir bei ihm nicht ihre bestimmte konkrete Entwicklung wie bei Riemann. Sein System bleibt unbestimmt, nur angedeutet. Grassmann gründete die geometrischen Axiome nicht auf Erfahrung, wie Riemann es tat, sondern auf Anschauung. Er sah indess den Raum als „etwas in der Natur gegebenes“ an, und daher die Geometrie als eine Anwendung der reinen Mathematik auf die Natur (II. Aufl. S. 277).[1] So sah er in Übereinstimmung mit den Empiristen den Raum als eine objektive Realität an. In einem Anhang vom Jahre 1877 klagt er, dass weder Riemann noch Helmholtz seiner Ausdehnungslehre die geringste Aufmerksamkeit geschenkt hätten, „obgleich darin

1) Eine ähnliche Auffassung vertritt Felix Klein.

die Grundlagen der Geometrie in viel einfacherer Weise zur Anschauung kommen, als in jenen späteren Schriften" (a. a. O., S. 273). Grassmanns Ausdehnungslehre gewinnt allmählich jetzt mehr Beachtung, und viele stellen sie den Werken von Riemann und Helmholtz gleich, wenn nicht noch darüber.

§ 12. Beltrami (1835—1900).

Die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher in den Jahren 1860—63, der manche Hinweise auf Lobatschefsky enthält, Houels französische Übersetzung von Lobatschefskys und Bolyais Werken von 1866 und 1867, sowie italienische Übersetzungen (siehe oben S. 27), Baltzers „Elemente der Mathematik" 1867 und Riemanns Abhandlung 1868 liessen die nichteuklidische Geometrie jetzt erst den Mathematikern allgemein bekannt werden. Von dieser Zeit an erschienen allmählich viele sich daran anknüpfende Betrachtungen. Die wichtigsten unter diesen sind die zwei Abhandlungen des italienischen Mathematikers Eugenio Beltrami, „Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea", Giorn. di Matem. T. VI, S. 284—312 (1868), und „Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante", Annali di Matem. T. II, S. 232—255 (1868—1869): Diese Abhandlungen sind auch wieder gedruckt in den Opere mathematiche di E. Beltrami S. 374—405 und S 406—429, Bd. I, Milano (Hoepli) 1902. Die Zitate im Text beziehen sich auf dieses Werk.[1])

Man wird sich erinnern, dass Lambert nachgewiesen hatte (1786), dass die Geometrie, die der Hypothese des stumpfen Winkels entspricht, genau mit der sphärischen übereinstimmt, während die des spitzen Winkels in jeder Beziehung analog war und vielleicht als die Geometrie

1) Französische Übersetzung des „Saggio" von Hoüel, Annal. sci. de l'école normale. T. VI. S. 251—288 (1869). Von demselben Verfasser Übersetzung der „Teoria fondamentale", a. a. O., S. 345—357 (1869).

einer imaginären Kugel gelten konnte. (Siehe oben S. 16.) Obwohl Lambert es nicht bemerkt zu haben scheint, kann die zuletzt genannte Geometrie von der ersteren einfach dadurch abgeleitet werden, dass man den Radius der Kugel imaginär macht. Lobatschefsky zeigte auch, dass die trigonometrischen Formeln seiner Geomertrie von denen der sphärischen abgeleitet werden könnten, indem man die Seiten der Dreiecke imaginär machte (siehe oben S. 33). Ferner zeigte Beltrami in seiner ersten Abhandlung, dass, gerade wie Riemanns ebene Geometrie dargestellt werden kann, auf einer Fläche von konstantem, positivem Krümmungsmass (wie der Kugel), die Lobatschefskys dargestellt werden kann auf einer Fläche von konktantem negativem Krümmungsmass. Eine solche Fläche nennt er analog pseudosphärisch (S. 381). Der Zusammenhang zwischen der konstanten k, die in Gauss' und Bolyais Schriften und in denen von Lobatschefsky als eine gewisse „Einheitsstrecke" auftritt, und Riemanns Krümmungsmass wird jetzt klar (siehe oben S. 23).[1])

Von grosser Wichtigkeit ist auch die Tatsache, dass Beltrami, ohne etwas von Cayley zu wissen, eine Methode erfand mittelst einer Hilfskugel, ganz ähnlich Cayleys Projektivmethoden, die seitdem so wichtig geworden sind (Klein, S. 236), die pseudosphärische Plani-

1) Es wird von Pietzker, „Gestaltung des Raumes" S. 13, behauptet, dass diese Versinnlichung der Lobatschefskyschen Geometrie auf einer pseudosphärischen Fläche sich für den unbefangen urteilenden Verstand eher als eine Widerlegung als eine Bestätigung der nichteuklidischen Geometrie darstellt. Er besteht darauf, dass diese Geometrie nicht eine selbständige, von der euklidischen unabhängige, Geometrie ist, welche mittels der pseudosphärischen Fläche bloss versinnlicht wird, sondern, dass sie eben die Geometrie dieser Fläche ist. Sie widerspricht also keineswegs der euklidischen Geometrie, sondern ist auf diese gegründet, ist ein Zweig von ihr.

Ähnlich sagt Kroman, „Unsere Naturerkenntnis", S. 168. Es sei kein Wunder, dass die Lobatschefskysche Geometrie mit der der pseudosphärischen Fläche übereinstimmt, denn sie ist eben diese Geometrie, welche er unwillkürlich aufgebaut hat.

metrie auf eine euklidische Ebene zu projizieren und dieselbe innerhalb eines gewissen „Cerchio limite" (S. 379) darzustellen, dessen Peripherie die unendlich entfernten Punkte der pseudosphärischen Fläche darstellt. Geodätische Linien der letzteren werden durch Gerade in diesem „piano ausiliare" dargestellt, aber die Entfernungen vermindern sich, wenn man sich dem Grenzkreis nähert.

In seiner zweiten Abhandlung dehnt Beltrami diese Betrachtungen auf die Fälle von drei- und n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten von konstantem negativem Krümmungsmass aus, indem er die Formeln verallgemeinert, die bei zwei Dimensionen als gültig befunden waren. Die Lobatschefsky'sche Stereometrie ist jedoch keiner solchen Versinnlichung im drei-dimensionalen Raum fähig, wie die Lobatschefsky'sche Planimetrie es ist, weil wir nicht im stande sind, eine drei-dimensionale pseudosphärische Fläche uns vorzustellen. Dazu gehört eine vierte Dimension. Aber durch Anwendung einer drei-dimensionalen Hilfskugel (d. i. eine Kugel, deren Radius in der vierten Dimension liegt) ist Beltrami im stande, die oben beschriebene Projektionsmethode auf diesen Fall auszudehnen. Die nichteuklidische Stereometrie wird auf einen Teil des euklidischen Raumes projiziert, der analog von einer Grenzkugel begrenzt ist. Diese Abbildung beschreibt Helmholtz, („Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" 1870, Vorträge und Reden, V. Aufl. 1903, Bd. II, S. 18), mit folgenden Worten: „Diese letzteren Verhältnisse hat Beltrami dadurch der Anschauung zugänglich gemacht, dass er zeigte, wie man die Punkte, Linien und Flächen eines pseudosphärischen Raumes von drei Dimensionen im Innern einer Kugel des Euklides'schen Raumes so abbilden kann, dass jede geradeste Linie des pseudosphärischen Raumes in der Kugel durch eine gerade Linie vertreten wird, jede ebenste Fläche des ersteren durch eine Ebene in der letzteren. Die Kugeloberfläche selbst entspricht dabei den unendlich entfernten Punkten des pseudosphärischen

Raumes; die verschiedenen Teile desselben sind in ihrem Kugelabbild umsomehr verkleinert, je näher sie der Kugeloberfläche liegen und zwar in der Richtung der Kugelradien stärker als in den Richtungen senkrecht darauf. Gerade Linien in der Kugel, die sich erst ausserhalb der Kugelfläche schneiden, entsprechen geradesten Linien des pseudosphärischen Raumes, die sich nirgends schneiden.“ Diese Projektionsmethode ist von grosser Wichtigkeit geworden in der späteren Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

§ 13. Helmholtz (1821—1894).

Schon vor der Veröffentlichung von Riemanns Abhandlung entwickelte Helmholtz unabhängig von ihm ähnliche Ideen. Sein erster Vortrag hierüber wurde in der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Heidelberg am 22. Mai 1868 gehalten und gleich nachher veröffentlicht in den Verhandlungen der natur-historisch-medizinischen Gesellschaft, Bd. IV, S. 197—202, unter dem Titel: „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie“. (Auch gedruckt in seinen gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen, Bd. II, S. 610—616. Leipzig 1883.[1]) Riemanns Abhandlung wurde zuerst veröffentlicht in den Abhandlungen der Göttinger Königl. Ges. d. Wissenschaft., Bd. XIII, 1867.

Helmholtz beginnt den oben erwähnten Vortrag mit den Worten: „Die Untersuchungen über die Art, wie Lokalisation im Gesichtsfeld zu stande kommt, haben den Vor-

---

1) Das Datum dieses Vortrags, wird in den Verhandlungen der natur-historisch-medizinischen Gesellschaft als der 22. Mai 1866 angegeben. Dasselbe Datum wird auch in den wissenschaftlichen Abhandlungen angegeben. Indessen scheint dieses Datum zweifelhaft zu sein, da Riemann erst am 22. Juli 1866 starb und seine Abhandlung erst 1867 veröffentlicht wurde, während Helmholtz diese Veröffentlichung erwähnt, als habe sie ihm die Priorität der Endeckung vorweggenommen. Das Datum 1868 wird auch angegeben von Klein (Nicht-Euklidische Geometrie S. 260), Baltzer, Elemente der Mathematik, Bd. II, S. 113, 1883, und anderen Autoren.

tragenden veranlasst, auch über die Ursprünge der allgemeinen Raumanschauungen überhaupt nachzudenken." Er wurde auf die Frage geführt, „welche Sätze der Geometrie Wahrheiten von tatsächlicher Bedeutung aussprechen, welche dagegen nur Definitionen oder Folgen von Definitionen sind. So wurde er auf den Schluss geführt, dass unser Raum nur eine von vielen möglichen Formen der Aussenwelt sei, dass die geometrischen Axiome aus der Erfahrung abgeleitet werden und nur die Eigentümlichkeit der vor uns liegenden Aussenwelt ausdrücken". Sie scheinen uns nur selbstverständlich, weil wir so durchaus an sie gewöhnt sind. Andere Formen sind nicht nur denkbar, sondern auch vorstellbar, und würden für uns die natürlichen sein, wären wir immer an sie gewöhnt gewesen. Obwohl aber die geometrischen Axiome empirisch sind, und nur das ausdrücken, worin sich unser Raum von andern möglichen Räumen unterscheidet, wird es gewiss andere Eigenschaften geben, in denen alle diese Räume übereinstimmen müssen. Dies sind nach Helmholtz die analytischen Eigenschaften. Wie ein Raum auch beschaffen sein mag, er kann nicht mit der Analysis in Widerspruch stehen, denn das würde heissen, dass er mit sich selbst im Widerspruch stände. Um also diejenigen Eigenschaften zu entdecken, in denen alle Räume übereinstimmen müssen, haben wir nur die Bedingungen aufzusuchen, die die analytische Geometrie möglich machen. So soll die Analysis unser oberster Führer sein, da sie allein von der Anschauung unabhängig ist. Sie allein zeigt uns mit Sicherheit, was notwendig zu jedweder Art von Raum gehört, unabhängig von den besonderen Einschränkungen unserer Anschauung.

Den Rest seines Vortrags widmete Helmholtz sodann einer Besprechung von Riemanns Abhandlung. Er sieht darin einen Mangel, dass letzterer als Hypothese die Annahme an die Spitze stellt, dass der Ausdruck für das Linienelement das sein wird, was Helmholtz den ver-

allgemeinerten Pythagoreischen Satz nennt. Diese Annahme erfordert eine Begründung, und diese versucht Helmholtz auf folgende Weise zu geben: Die analytische Geometrie beruht auf Messung und Messung beruht auf Kongruenz und freier Beweglichkeit. Daher sind die Bedingungen, die die Existenz der analytischen Geometrie ermöglichen, folgende:

1. Es genügt eine bestimmte Zahl Abmessungen, um einen festen Punkt zu bestimmen.

2. Es existieren in sich feste und freibewegliche Körper.

3. Grösse und Gestalt eines Körpers ändern sich bei einer Drehung desselben nicht.

Aus diesen drei Annahmen leitet er analytisch den verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz für das Linienelement ab, wie es sich bei Riemann findet. Doch wird die analytische Arbeit erst in einer späteren Abhandlung ausgeführt: „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen". Nachrichten der Königl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 3. Juni 1868, Nr. 9, S. 193—221. (Auch in wissenschaftliche Abhandlung., S. 618—639 gedruckt.) Diese Schrift ist eine ausführlichere Ausarbeitung der erstgenannten.

Diese drei Bedingungen der Möglichkeit einer analytischen Geometrie sind also auch die notwendigen und hinreichenden Axiome des verallgemeinerten Raumbegriffs. Um unsern eigenen Raum zu erhalten, müssen noch zwei besondere Axiome hinzukommen.

Hier begegnet uns jedoch ein interessantes Missverständnis. Helmholtz erkennt nicht die Möglichkeit eines Raumes an, der ein negatives Krümmungsmass hat, offenbar in der Meinung, dies würde bedeuten, dass der Krümmungsradius imaginär wäre. Er erkennt die Möglichkeit nur eines positiven oder keines Krümmungsmasses an. Daher, sagt er, wenn wir $n = 3$ und den Raum unendlich annehmen, muss er notwendig euklidisch sein. Dies sind die beiden hinzukommenden Axiome, die notwendig sind,

um unsern Raum zu ergeben. Natürlich schliessen sie den Lobatschefsky'schen Raum noch nicht aus.

In einem Zusatz zu der ersten Abhandlung, hinzugefügt 1869 (im Text S. 31—32 der Verhandlungen, S. 617 der wissenschaftlichen Abhandl.) und in einer Anmerkung zu dem zweiten Aufsatz (S. 639 der wissensch. Abhandl.) gibt Helmholtz ausdrücklich diesen Irrtum zu und verbessert ihn.

Helmholtz entwickelte seine Ideen weiter und suchte sie zugleich in populärer und gemeinverständlicher Form darzustellen in einem Vortrag, den er im Dozentenverein zu Heidelberg im Jahre 1870 hielt, und der dann verbessert gedruckt wurde in den populär-wissenschaftlichen Vorträgen und in den Vorträgen und Reden (Bd. II der V. Aufl., 1903, S. 3—31, zitiert wird in dem Text nach dieser Ausgabe) unter dem Titel: „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome." In dieser Rede schildert Helmholtz ausser dem, was in den vorangehenden Vorträgen gegeben war, besonders Beltramis Versinnlichung der Lobatschefskyschen Geometrie mittels der pseudosphärischen Fläche, wodurch er auf seinen vorigen Irrtum aufmerksam gemacht wurde. (Siehe S. 55 oben.)

Um nun die Art zu erläutern, wie die Form unserer Anschauung durch die Natur des objektiv wirklichen Raumes bestimmt wird, führt Helmholtz seine berühmte Fiktion von Flächenwesen ein, d. i. verstandbegabte Wesen, die nur zwei Dimensionen haben und auf einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel leben, von der sie sich nicht entfernen können, und die nur fähig sind, das wahrzunehmen, was auf dieser Fläche ist, oder was darauf geschieht. [1])

---

1) Diese Fiktion war ursprünglich von Fechner erfunden und in einem zum Scherz geschriebenen Aufsatz verwendet: „Der Raum hat vier Dimensionen", in „Kleine Schriften von Dr. Mises", 1846, S. 254—276. Ausg. von 1875. Fechners Flächenwesen sind jedoch beschränkt auf solche, die in einer Ebene wohnen. Die Idee von Kugelflächenwesen scheint Helmholtz eigen zu sein. Es sei bemerkt, dass diese letzteren

Wenn solche Wesen auf einer Ebene wohnten, würden sie, meint Helmholtz, die euklidische Planimetrie entwickeln.[1]) Wenn sie auf einer Kugel wohnten, würden sie die Rie-

Wesen ebenso wie die Kugelfläche, die sie bewohnen, trotz ihrer Krümmung als zweidimensional angesehen werden. Bei Fechner gilt die bewohnte Ebene als im dreidimensionalen Raum existierend, während bei Helmholtz die bezügliche Ebene oder Kugel als ein selbständiger Raum von zwei Dimensionen, unabhängig von irgend einem umgebenden oder eingeschlossenen Raum, angesehen wird, ganz als ob sogar die letzteren nicht existierten.

1) Diese Annahme ist mit Recht bestritten von Weissenborn, „Über die neueren Ansichten von Raum und von den geometrischen Axiomen". Vierteljahrsschrift f. wissensch. Phil., Bd. II, 1878, S. 327. Er zeigt, dass solche Wesen nicht ganz dieselbe Planimetrie wie die euklidische entwickeln würden. Symetrische, ebene Figuren, die von uns als gleich angesehen werden, würden von ihnen nicht so angesehen werden, weil sie nicht zur Deckung gebracht werden können durch blosses Herumschieben in der Ebene. Dies kann nur geschehen, wenn man eine von ihnen umklappt, d. h. sie durch einen dreidimensionalen Raum führt, der für diese Wesen als nicht existierend angenommen wird. Der Fall ist daher für sie derselbe, wie der der enantiomorphen Körper für uns. Wir betrachten diese nicht als gleich, sondern nur als symetrisch, obgleich eine Bewegung durch einen vierdimensionalen Raum sie zur Deckung bringen würde. Weissenborn schliesst daher, dass wir keine Vorstellung von der Art Anschauung haben, die die zweidimensionalen Wesen haben würden, und was für Konstruktionen in einer absoluten Ebene möglich sind. Die einzige Ebene, die wir uns vorstellen können, ist die „ebene Begrenzungsfläche eines dreidimensionalen Körpers". Daher bestreitet er (S. 328) Helmholtz' Behauptung: „Anschauungen, die man hat, sich wegdenken, ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen, ist schwer." (Vorträge und Reden S. 15.) Weissenborn sagt, dies ist für uns nicht nur sehr schwer, sondern ebenso unmöglich, wie eine neue Anschauung hinzuzudenken, eben weil wir hierfür kein Analogon haben. Daher schliesst er: „Wir können uns nicht mehr als drei Dimensionen des Raumes vorstellen, aber auch nicht weniger . . . . Daraus folgt, dass wir uns von der Raumanschauung solcher Flächenwesen . . . . keine deutliche Vorstellung machen können.

Auch Jacobson stimmt dieser Auseinandersetzung Weissenborns lebhaft bei. Siehe seine „Philosophische Untersuchungen zur Metageometrie". Vierteljahrsschrift f. wiss. Phil., Bd. VII, 1883, Art. I, S. 146.

mannsche sphärische Planimetrie entwickeln. In jedem Falle würde die Geometrie, die sie entwickelten, von der Natur der von ihnen bewohnten Welt abhängen.[1]) Ähnlich,

---

Wundt hat ähnlich eingewendet, dass wir uns die Ebene nicht unabhängig von der dritten Dimension vorstellen können. Er sagt, Logik, Bd. I, S. 494, 1880: „Wir bedürfen unserer vollständigen Raumanschauung, nicht nur für die Vorstellung irgend einer gekrümmten Oberfläche, sondern selbst für die Vorstellung einer Ebene oder einer Geraden; denn wir können die Ebene so wenig wie die Gerade anders vorstellen als im Raum: Wir stellen uns beide nicht vor als selbständige Räume sondern als Gebilde im Raum."

Ähnlich behauptet Kroman, „Unsere Naturerkenntnis", S. 154, dass unsere ganze Geometrie auf der Annahme aufgebaut ist, dass die drei Dimensionen alle Dimensionen sind, und dass diese Annahme mit bestimmend ist für die Planimetrie und für die Geometrie der Linien. Wenn eine vierte Dimension angenommen würde, würden wir auch unsere Planimetrie zu ändern haben. Er erwähnt auch den Fall der symmetrischen ebenen Figuren von Weissenborn.

Ähnlich sagt Pietzker in seiner „Gestaltung des Raumes" 1891, S. 63: „Es ist direkt unmöglich, aus der räumlichen Anschauung auch nur eine Dimension hinwegzudenken, ohne aus dem Bereich des Anschaulichen herauszugehen. Wir sprechen ja in der Geometrie von Linien und Flächen, aber kein Mensch ist im Stande, sich ein selbständiges Gebild dieser Art vorzustellen, sie sind für niemand etwas anderes, als Accidentien der allein eine reale Existenz besitzenden dreidimensionalen Körper."

Neulich hat auch Kirschmann einen geistreichen Einwand vom psychologischen Standpunkt aus gemacht, „Die Dimensionen des Raumes". Wundts Philosophische Studien, Bd. XIX, 1902, S. 330—332. Wir schauen die Ebene von der dritten Dimension aus, sagt er, und können sie nicht anders schauen, als so. Aber die zweidimensionalen Wesen schauen ihre Ebene von der Ebene selbt aus. Ihre Anschauung davon ist daher ganz verschieden von der unsrigen. Tatsächlich haben sie keine Anschauung von Flächen, wie wir sie haben, sondern nur von Linien. Die zweite Dimension ist für sie gegeben nur durch die Entfernungen, in denen ihre Linien gesehen werden, gerade wie die dritte Dimension für uns nur durch Entfernungen gegeben ist, in denen die Flächen gesehen werden. Daher ist die Anschauung dieser Wesen etwas von der unsrigen ganz Verschiedenes und etwas, wovon wir uns keine Vorstellung bilden können, da für uns „jede räumliche Wahrnehmung die dritte Dimension, d. i. die allseitige Ausdehnung voraussetzt".

1) Viele Philosophen verwerfen diese Argumente von den Flächenwesen, entweder weil solche Wesen reine Abstraktionen sein würden,

meint **Helmholtz**, könnten wir durch genaue Beobachtungen dahin kommen, zu entdecken, dass der objektive Raum unserer Welt nicht der euklidischen Geometrie unserer Anschauung entspräche, sondern einer der anderen Geometrien, die als analytisch möglich gefunden sind, dass er daher ein positives oder ein negatives Krümmungsmass haben könnte.

---

von denen wirkliche Existenz nicht ausgesagt werden könnte, oder weil sie folgern, dass sie durch die Widersprüche ihres Raumes dahin gebracht werden würden, eine dritte Dimension anzunehmen.

Unter denen, die dies Argument annehmen, mögen angeführt werden:

Land, „Kants Space and Modern Mathematics". Mind. Vol. II, S. 43, Januar 1877.

A. Krause, „Kant und Helmholtz", S. 46, 1878.

Weissenborn, a. a. O., S. 331, 1878.

Pietzker, a. a. O., S. 54, 1891.

Stanley Jevons, siehe Jacobson a. a. O., S. 147—149.

Schmitz-Dumont, „ „ „ „ „ „ „ „

Lotze, Metaphysik, S. 250, 1879.

Der bei weitem am meisten erhobene Einwand ist jedoch der der Verwechselung von Räumen und Gebilden im Raum. Die wichtigsten von denen, die diesen Einwand gemacht haben, sind folgende:

Lotze, Metaphysik, S. 262—265, 1879.

Wundt, Logik, Bd. I, S. 494, 1880.

Weissenborn, a. a. O., S. 327, 1878.

Heymans, Zur Raumfrage. Art. II, Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil., Bd. XII, S. 446, 1888.

Natorp, Zu den Grundlagen der neueren Mathematik. Arch. f. system. Phil., Bd. VII, S. 381, 1901.

Milau, Aus dem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie. Kiel 1901, S. 27.

Jacobson verwirft die Argumente von den Flächenwesen wegen der realistischen Hypothese, die sie voraussetzen, und die er als von den Philosophen überwunden ansieht. Siehe a. a. O., S. 151.

Es ist über die Flächenwesen so diskutiert, so viele Einwände sind gegen sie erhoben, eine so grosse Mannigfaltigkeit der Ansichten hinsichtlich der Schlüsse, die daraus gezogen werden sollten, hat sich gezeigt, dass die Mathematiker selbst zu dem Schluss gekommen sind, die Fiktion sei eine unglückliche und mehr geeignet, das Ergebnis zu verwirren als aufzuklären. Sie haben es daher für das beste gehalten, die Fiktion fallen zu lassen. Vgl. Russell, The Foundations of Geometry. Cambridge 1897, S. 70, Anm. S. 101.

Zugleich erklärt Helmholtz energisch, dies Krümmungsmass sei nicht so zu fassen, als bedeute es eine Krümmung im gewöhnlichen Sinne des Wortes (siehe Riemann oben S. 47). „Der Name ist nur als kurze Bezeichnung eines verwickelten Verhältnisses von dem einen Falle hergenommen, wo der bezeichneten Grösse eine sinnliche Anschauung entspricht", sagt er (S. 18). Die Existenz eines Krümmungsmasses würde daher nur bedeuten die Existenz anderer Massverhältnisse, eines anderen Verhaltens der Körper bei Bewegung als dessen, woran wir gewöhnt sind. Sich eine Vorstellung zu bilden, wie eine solche Welt, wie die pseudosphärische, erscheinen würde, ist für den geübten Physiologen und Mathematiker nicht schwer. Er hat nur die Reihe der Sinneseindrücke zu beschreiben, die solch ein verschiedenes Verhalten der Körper in uns nach den bekannten Gesetzen der Physiologie und den Anforderungen der mathematischen Theorie hervorrufen würde.[1] (Vgl. auch „Die Tatsachen in den Wahrnehmungen", Vorträge und Reden, S. 230.) Dies wirft dann Kants Behauptung um, dass die euklidischen Axiome a priori sein müssen, weil wir uns keinen ihnen widersprechendes Verhalten der Figuren vorstellen können. Wir können uns eine pseudosphärische Welt nicht nur vorstellen, behauptet Helmholtz, sondern sie würde nicht einmal so sehr verschieden von unserer eigenen Welt aussehen, selbst unter der Annahme eines sehr grossen Krümmungsmasses. Um zu beschreiben, wie eine solche Welt aussehen würde, benutzt Helmholtz Beltramis Abbildung des pseudosphärischen Raumes von

1) Eine ganz ähnliche Theorie wird von einem so neuen Autor wie Poincaré aufgestellt. Er betrachtet unsere Vorstellung als ursprünglich „amorph", die besonderen Gesetze (Axiome), die darin herrschen, als festgesetzt durch Konvention, geleitet durch Erfahrung. Er sagt: „Science et hypothèse, Paris 1902, S. 84: „La Géometrie n'est que le résumé des lois suivant lesquelles se succèdent ces images. Rien n'empêche alors d'imaginer une série de représentations, de tout point semblables à nos représentations ordinaires, mais se succédant d'après des lois différentes de celles auxquelles nous sommes accoutumés."

drei Dimensionen in dem Innern einer begrenzten euklidischen Kugel (Teoria fondamentale, siehe oben S. 55—56). Helmholtz nimmt an, dass die pseudosphärische Welt uns erscheinen würde, als wären wir in den Mittelpunkt der Beltramischen Kugel gesetzt (S. 25—26). Wenn wir uns bewegen, bewegt sich die ganze Kugel mit uns, sodass wir immer im Mittelpunkt bleiben. So würden die entferntesten Gegenstände uns erscheinen, als lägen sie in einer begrenzten Entfernung, gleich der Länge des Krümmungsradius. Gegenstände, denen man sich näherte, würden sich mehr in der Länge, als in der Breite ausdehnen. Diese und einige andere Eigentümlichkeiten in dem Verhalten von Gegenständen sind alles Verschiedenheiten, die nach Helmholtz zwischen unserer Welt und einer pseudosphärischen sich bemerkbar machen würden. Nun kann das Verhalten der Gegenstände in einer solchen Welt ungefähr nachgeahmt werden, wenn man eine grosse Konvexlinse vor die Augen hält (§ 27). Auch hier erscheinen die entfernten Gegenstände viel näher, die entferntesten nahe dem Brennpunkt der Linse. Aber wir gewöhnen uns bald an die Verdrehung und beurteilen die Entfernungen richtig. So meint Helmholtz, würden wir uns auch bald an die Eigentümlichkeiten einer pseudosphärischen Welt gewöhnen. Einem Einwohner der letzteren würde unsere Welt anfangs ebenfalls sonderbar vorkommen. Doch würden alle Messungs- und Kongruenzsätze in beiden Welten gültig bleiben. Dies erläutert Helmholtz durch das Abbild unserer Welt in einem Konvexspiegel. „Das Bild eines Mannes, der mit einem Massstab eine von dem Spiegel sich entfernende gerade Linie abmisst, würde immer mehr zusammenschrumpfen je mehr das Original sich entfernt, aber mit seinem ebenfalls zusammenschrumpfenden Massstab würde der Mann im Bilde genau dieselbe Zahl von Zentimetern herauszählen, wie der Mann in der Wirklichkeit" (§ 25). So schliesst Helmholtz: „dass, wenn die sämtlichen linearen Dimensionen der uns umgebenden Körper und die unseres eigenen Leibes mit ihnen in gleichem Verhältnisse,

z. B. alle auf die Hälfte verkleinert oder alle auf das Doppelte vergrössert würden, wir eine solche Änderung durch unsere Mittel der Raumanschauung garnicht würden bemerken können" (S. 24).[1]) Daher würde die analytische, d. h. die Messungsgeometrie auf beide Räume Anwendung finden. Doch denkt Helmholtz, dass die mechanischen Verhältnisse völlig verändert sein würden. Insbesondere denkt er (S. 29), dass das Trägheitsgesetz nicht mehr gelten würde; da die

---

1) Sigwart, Logik. Bd. II, 1878, S. 72 tritt dieser Behauptung von Helmholtz entgegen, weil, selbst wenn sich die Netzhaut proportional der übrigen Welt änderte, die Erinnerungsbilder wenigstens momentan konstant bleiben und uns so befähigen würden, die Veränderung zu bemerken. Dies setzt aber voraus, dass Erinnerungsbilder oder überhaupt Vorstellungen als unabhängige Wesenheiten existieren. Sie sind aber nicht wie so viele materielle Dinge, denen das Prinzip der Konstanz der Masse zukomme, aufbewahrt, sondern Erinnern heisst lediglich reproduzieren. Wenn ich einen Gegenstand zum zweiten Male sehe und ihn als von derselben Grösse wie vorher erkenne, so heisst das nur, ich konstatiere, dass, in derselben Lage und in derselben Entfernung, sein jetziges Netzhautbild sein früheres deckt, wie ich es kraft meiner Erinnerungsfähigkeit reproduzieren kann. Wenn sich inzwischen Gegenstand und Netzhautbild in derselben Proportion vergrössert oder verkleinert haben, würde nichtsdestoweniger dieselbe Kongruenz bestehen. Wessen wir uns erinnern, ist nicht das Bild als ein selbständiges Ding, sondern der Eindruck auf die Netzhaut, d. h. welche Nervenfasern erregt waren. Ich kann daher nicht glauben, dass dieser Einwand Sigwart's gegen Helmholtz stichhaltig ist.

Kirschmann, „Die Dimensionen des Raumes" in Wundt's „Philosopische Studien", Bd. XIX, 1902, S. 409—410 meint, während er Helmholtz' Behauptung zugibt, dennoch, dass sie im Widerspruch steht mit dem Gesetz der Erhaltung der Quantität der Materie, dass entweder dies oder die Relativität der Grösse geopfert werden muss. Aber diese Konstanz der Masse ist lediglich ein mechanisches Postulat, nicht ein absolutes Prinzip, ebensowenig wie die Konstanz der Grösse. Ganz ebenso, wie eine Veränderung der absoluten Grösse keinen Sinn für uns hat, sodass wir die Grössen unserer Welt als konstant annehmen müssten, obwohl wir das bei ihnen nicht beweisen können, so muss die Masse innerhalb dieser so als konstant angenommenen Welt als konstant angenommen werden, weil eine Veränderung einer absoluten Masse für uns ebenfalls keinen Sinn haben würde. Die beiden Prinzipien stehen also nicht im Widerspruch, sondern stützen sich gegenseitig.

Geschwindigkeit eines Körpers, wenn er sich vom Mittelpunkt der Kugel entfernte, abnehmen würde, so wäre dieselbe nicht unabhängig vom Ort. Ich glaube indes, das ist ein Irrtum. Die Geschwindigkeit würde sich vermindern, in Bezug auf einen gedachten umgebenden euklidischen Raum. Aber dieser umgebende euklidische Raum soll nach Helmholtz nicht gleichzeitig mit dem pseudosphärischen existieren. In dem pseudosphärischen Raum selbst gemessen, würde das Tätigkeitsgesetz doch gelten: denn für die Geschwindigkeit v gilt: $v = \frac{s}{t}$, worin s die Zahl der Einheiten bedeutet, die enthalten sind in den in der Zeit t durchlaufenen Strecken. Wie nun diese Strecken, so vermindern sich auch die Einheiten, sodass die Zahl s und folglich die Geschwindigkeit v konstant bleiben muss. Das Trägheitsgesetz würde also bei Messung innerhalb seines eigenen Raumes in Kraft bleiben. Dieser Raum würde daher für seine Bewohner weder analytisch, noch mechanische Widersprüche aufweisen. Er muss also analytisch, mechanisch und intuitiv als möglich angesehen werden. Auf diese Weise glaubt Helmholtz das Kantsche Argument für den apriorischen Ursprung der euklidischen Axiome, gegründet auf der Annahme der Nichtvorstellbarkeit anderer, widerlegt und so den empirischen Ursprung dieser Axiome nachgewiesen zu haben.

Von philosophischer Seite sind viele Einwände gegen diese Vorstellung des pseudosphärischen Raumes erhoben worden, weil dadurch nichts Neues geboten wird, was uns über unsere euklidischen Anschauungen erhebt.[1]) Was ist es tatsächlich, was uns Helmholtz gibt? Nicht einen

---

1) Siehe z. B. Land, Kant's Space and modern Mathematics. Mind., Vol. II, S. 41, 42, 1877.

A. Krause, Kant und Helmholtz. S. 43, 1878.

J. B. Stallo, The Concepts and Theories of Modern Physics. S. 244—247, 1881.

J. Jacobson, Philosophische Untersuchungen zur Metageometrie. Vierteljahrschrift für wissensch. Philosopie. Bd. VIII, Art. 1, S. 154, 1883.

Blick in die pseudosphärische Welt, sondern eine Abbildung dieser Welt in unserem euklidischen Raum, mittels der Beltramischen Abbildung. Abgesehen nun von dem sehr ernstlichen Zweifel, ob die Beltramische Projektion wirklich die Art darstellt, wie eine solche Welt sich in unserm Sehraum projizieren würde, muss bemerkt werden, dass wir durch solche Projektion nichts gewonnen haben. Wir haben dadurch keineswegs eine Vorstellung von der pseudosphärischen Welt in ihren wirklichen Beziehungen erlangt, ebensowenig, wie eine dreidimensionale Perspektive eines vierdimensionalen Körpers diesen Körper in seiner wahren vierfachen Ausdehnung darstellt. Daher hat Land recht, wenn er von diesem Versuch von Helmholtz sagt: „Just the characteristic features of the thing we are to imagine are done away with, and all we are able to grasp with our intuition is a translation of that thing into something else." (a. a. O., S. 42.) Er vergleicht es mit einem Versuch, einen Kegel vorstellbar zu machen, indem man seine Projektion auf eine Ebene als einen Kreis oder als zwei Geraden darstellt.[1])

Für den wesentlichsten Irrtum in Helmholtz' Betrachtungsweise aber, auf den bis jetzt noch niemand hingewiesen zu haben scheint, halte ich die Tatsache, dass er keinen Unterschied macht zwischen dem Sehraum und dem mathematischen Raum. Er verfährt geradeso, als ob in unserem Sehraum die Gegenstände in ihren wahren mathematischen Beziehungen gesehen würden. In einem pseudosphärischen Raum z. B. sagt er, werden unendlich entfernte Gegenstände in einer endlichen Entfernung gesehen, als ob sie im euklidischen Raum in einer unendlichen Entfernung gesehen würden. Tatsächlich entspricht unser wirklicher Sehraum in jedem

---

Heymanns, Gesetze und Elemente des wiss. Denkens, I, S. 215, wendet gegen diese Vorstellung ein, dass unsere Raumwahrnehmungen nicht ursprünglich durch den Gesichts-, sondern durch den Tastsinn gegeben werden.

1) Vgl. auch Stallo, S. 245.

einzelnen Punkte Helmholtz' Beschreibung des pseudosphärischen Raumes. Nicht nur werden die entferntesten Gegenstände in einer endlichen Entfernung gesehen (und ein unendlich entfernter, wenn er überhaupt sichtbar wäre, würde auch in einer endlichen Entfernung gesehen werden), sondern es findet auch jene Verkürzung der Entfernungen in der Gesichtslinie, die Helmholtz beschrieb, statt. Die Sonne z. B. erscheint uns niemals in ihrer wahren Entfernung, sondern nur wie ein kleiner Körper, nicht weit von der Erde entfernt. Und die Sterne, die so viele tausend und sogar millionen Mal entfernter sind, scheinen dem Auge überhaupt kaum entfernter. Dieselbe Verkürzung wird auch bei geringeren Entfernungen beobachtet. Ein entferntes Schiff auf dem Meere sieht nicht wie ein grosses Schiff in der Entfernung aus, sondern wie ein Spielzeug in der Nähe. Ähnlich ist es, mit Gegenständen von einem hohen Turm aus gesehen. Es scheint also, dass die Verhältnisse in unserem Sehraume genau denen entsprechen, die, wie Helmholtz sagt, in einer pseudosphärischen Welt stattfinden. Nach Helmholtz sollten wir demnach unseren Sehraum für pseudosphärisch erklären. Wenn wir eine Konvexlinse vor unsere Augen hielten, würde dies seine pseudosphärische Eigenschaft nur vergrössern. Hielten wir eine Konkavlinse vor die Augen, so würde das seine pseudosphärische Eigenschaft etwas verringern, könnte sie aber niemals ganz beseitigen oder in sphärische Eigenschaft verkehren, da wir die entferntesten Gegenstände unseres Sehraumes immer in endlicher Entfernung darstellen müssen. Daher müssen wir schliessen, dass Helmholtz, anstatt uns eine neue Vorstellung zu geben, uns nur ein entstelltes Bild unserer gewöhnlichen visuellen Eindrücke zeigt. Der Versuch, den pseudosphärischen Raum vorstellbar zu machen, muss als gänzlich gescheitert angesehen werden, und wird in der Tat nicht weiter ernstlich von den Mathematikern verteidigt.

Ein anderer Beweis, den Helmholtz zur Unterstützung der empirischen Natur der Axiome in diesem Vortrag vorbringt (S. 29), ist, dass alle Geometrie auf Kongruenz beruht, und diese freie Beweglichkeit und Festigkeit der geometrischen Körper voraussetzt. Das erste, betont er, ist eine mechanische, das zweite eine physische Eigenschaft, und nur die Erfahrung kann uns lehren, dass solche Eigenschaften vorhanden sind. Daher muss die Geometrie gewissermassen als eine physikalische Wissenschaft angesehen werden, da sie es mit gewissen physikalischen und mechanischen Eigenschaften der Körper zu tun hat. Er sagt: „Die geometrischen Axiome sprechen also garnicht über Verhältnisse des Raumes allein, sondern gleichzeitig auch über das mechanische Verhalten unserer festesten Körper bei Bewegungen.“ (S. 30.) Ohne diese Beimischung von mechanischen und physikalischen Eigenschaften würde die Geometrie keinen realen Inhalt, sie würde keine notwendige Beziehung zur realen Welt haben; sie würde in der Luft schweben, ein blosses Hirngespinnst sein.[1]) Mit dieser Ansicht verbindet Helmholtz eine sehr physi-

---

1) Viel Kapital ist von Helmholtz und seinen Nachfolgern aus der Tatsache geschlagen, dass Newton die Geometrie als einen Zweig der Mechanik ansah. Siehe Vorträge und Reden, S. 405. Vgl. auch Erdmann, „Die Axiome der Geometrie“, S. 65. Auch Herz in seiner berühmten Mechanik sagt: „Von den allgemeinen Problemen der Mechanik ist das Raumproblem ein spezieller Fall.“ Es ist begreiflich, dass diese grossen Männer ihrem Lieblingsgegenstand den ersten Platz gegeben haben. Aber ich meine, es muss trotzdem als ein Hysteron proteron angesehen werden, wie noch deutlicher aus dem zweiten Teil hervorgehen wird. Eine gute, gründliche Kritik dieser Auffassung der Geometrie als von der Mechanik abhängig, hat Russell gegeben, „Foundations of Geometry“, S. 74—81 u. 88, 1897. Auch Gauss machte die Mathematik von der Mechanik abhängig. In einem Brief an Olbers, 1817, schrieb er: „Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen.“ (Siehe Engel, S. 380.) Eine ähnliche Idee deutet auch Riemann an, wenn er fragt, ob der Grund der Massverhältnisse unseres Raumes in darauf wirkenden Kräften zu suchen wäre. (Ende seiner Abh. Ges. Werke, S. 267.)

kalische Auffassung von der Natur des Raumes. Er sagt (S. 28), dass „unser im euklidischen ebenen Raum gewachsener Körper nicht in einen gekrümmten Raum übergehen könnte, ohne . . . . Dehnungen und Zusammenpressungen seiner Teile zu erleiden, deren Zusammenhang natürlich nur so weit erhalten bleiben könnte, als die Elastizität der Teile ein Nachgeben ohne Reissen und Brechen erlaubte". Aber woher sollte die Kraft kommen, die diese Dehnungen und Zusammenpressungen bewirkte? Könnte das eine Kraft sein, die der Raum selbst infolge seiner pseudosphärischen Eigenschaften ausübte? Wie sollen wir den Raum als Einfluss auf physikalische Körper ausübend denken? Und welches ist die Grösse dieser Kraft? Wenn ein euklidischer Körper von grosser Starrheit, ein Block von Nickelstahl z. B., in einen pseudosphärischen Raum geschleudert würde, würde sein Widerstand wohl gross genug sein, die pseudosphärischen Eigenschaften dieses Raumes zu überwinden, sodass er sich doch nach den Gesetzen Euklids verhalten würde? Oder würde er von diesem Raume zurückprallen, wenn er nicht mit genügender Kraft geschleudert wäre, um ihn zu durchdringen und sich seinen Eigenschaften anzupassen? Wie vieler Kraft ist solcher Raum fähig? Ist er imstande, jede physische Kraft zu überwinden, die angewendet werden könnte? In diesem Falle muss ihm unendliche Kraft zur Verfügung stehen. Aber wie kann eine unendliche Kraft wirklich sein?[1]) In einer solchen Auffassung kann nur eine Hypostatisierung der mathematischen Notwendigkeit, eine Verdinglichung des Raumes gesehen werden. Gegen diese Verdinglichung des

---

1) Lotze z. B. gibt zu bedenken, dass solche Kraft nicht unendlich sein kann, und so sagt er: „Solche Räume lassen sich nur als reale Schalen oder Wände denken, die durch Kräfte des Widerstands einer ankommenden realen Gestalt den Eintritt wehren, am Ende aber durch den heftigen Anfall dieser müssen zersprengt werden können." System der Philosophie, Bd. II, Metaphysik, S. 266, 1879.

Raumes oder die Erteilung physischer Kräfte an ihn haben die Philosophen ihre schärfsten Widersprüche erhoben.[1])

Der Gegenstand dieses Vortrags wurde wiederholt in einer Abhandlung, die in der englischen Zeitschrift Mind, Vol. I, Juli 1876, unter dem Titel „The Origin and Meaning of the Geometrical Axioms“, S. 301 ff., veröffentlicht wurde. Ein zweiter Aufsatz als Antwort auf die Einwendungen von Land ist auch im Mind unter demselben Titel gedruckt worden, Vol. III, S. 212 ff. 1878. (Der deutsche Originaltext zu diesem Artikel ist veröffentlicht in den wissensch. Abhandlungen, S. 640—660.) Eine Zusammenfassung seiner Ansichten mit besonderer Betonung der physiologischen Seite gibt Helmholtz in seiner Rede, gehalten zur Stiftungsfeier der Berliner Universität 1878, gedruckt in Vorträge und Reden, 5. Aufl., S. 213—247, mit drei Anhängen, S. 387—406 unter dem Titel „Die Tatsachen in der Wahrnehmung“.

In diesem letzten Vortrag geht Helmholtz viel gründlicher auf seine Theorie der Sinneswahrnehmungen als Zeichen äusserer Realitäten ein. Er sieht die Sinnesqualitäten mit Locke als subjektiv an, und jedes Sinnesorgan hat nach ihm wie nach Johannes Müller seine

---

1) Unter ihnen mögen folgende besonders erwähnt werden:

Lotze, Metaphysik, S. 266, 1879.

Riehl, Der philosophische Kritizismus, Bd. II, S. 93, 180, 1879.

Stallo, The Concepts and Theories of Modern Physics., S. 237, 1881.

Kroman, Unsere Naturerkenntnis, 1881, S. 164 der Übersetzung von 1883.

E. Laas, Idealism. und Positivism., Bd. III, S. 598, 1884.

G. Heymans, Zur Raumfrage, Art. II, Vierteljahrsschr. f. wissensch. Phil., Bd. XII, S. 444, 445, 1888.

Russell, The Foundations of Geometry, S. 79, 1897.

Milau, Aus dem Grenzgebiet zwischen Mathematik u. Philosophie, S. 29, 30, 1901.

Paul Natorp, Grundlagen der neueren Mathematik. Arch. f. system. Phil., Bd. VII, S. 380, 1901.

Reinecke, Die Grundlagen der Geometrie. Dissertation Halle, S. 35, 1903.

eigene „spezifische Energie". Ferner sieht er die Raumqualität der Sinneswahrnehmungen auch als subjektiv an und stimmt soweit mit Kant überein. Er sieht diese Raumqualität sozusagen als die spezifische Energie eines besonderen Raumsinnes an, welche durch die Empfindung der Innervation bei Bewegung gegeben wird (S. 224), eine Theorie, der sich viel moderne Psychologen angeschlossen haben. Aber nur die reine räumliche Qualität ist subjektiv; die Gesetzmässigkeit des Raumes, wie sie in den Axiomen ausgedrückt ist, ist eine Abbildnng der Gesetzmässigkeit der Aussenwelt. Obwohl Helmholtz als verächtlich die naive Vorstellung verwirft, dass uns unsere Empfindungen genaue Abbildungen äusserer Dinge geben, tut er das nur, insofern es ihre Qualität und blosse räumliche Ausgedehntheit betrifft. Die Gesetzmässigkeit von ihnen ist doch ein genaues Gegenstück der Gesetzmässigkeit der äusseren Gegenstände, und in sofern sind die Empfindungen wahr und wahrhaftig. Das drückt er mit den Worten aus, dass die Empfindungen Zeichen der äusseren Dinge sind (S. 223). So schliesst er: „Der Raum kann transscendental sein, ohne dass es die Axiome sind." Dies ist der Titel des zweiten Anhangs. Helmholtz betrachtet diese psychologische Subjektivität der Raumvorstellung als den wichtigsten und allein wahren Teil von Kants Raumlehre.[1])

Man möchte jedoch gerne wissen, wie es Helmholtz möglich ist, sich gewissermassen ausserhalb seiner Empfindungen zu stellen, indes diese genaue Übereinstimmung der Gesetzmässigkeit der Empfindungen mit der äusseren Gesetzmässigkeit zu entdecken. Dazu muss er eine Kenntnis der äusseren Welt haben, unabhängig von den Empfindungen,

1) Diese Ansicht über die Wahrnehmungen, als Zeichen der äusseren Dinge, scheint Helmholtz schon 1855 ausgedrückt zu haben in seiner Abhandlung „Über des Sehen des Menschen", am deutlichsten jedoch in seiner Abhandlung „Über die neueren Fortschritte in der Theorie des Sehens", bedeutend vor seinen mathematischen Spekulationen also. Vgl. Erdmann, „Die Axiome der Geometrie", S. 119.

durch die allein er sie doch nur erfahren kann. Diese Kenntnis aber, die gänzlich unabhängig von der Empfindung wäre, wäre rein a priori in des Wortes strengster Bedeutung, oder sonst wäre sie keine Erkenntnis, sondern eine blosse Vermutung. Dann ist die ganze Helmholtz'sche Theorie bloss eine unbeweisbare Hypothese.

In dem dritten Anhang endlich „Die Anwendbarkeit der Axiome auf die physische Welt", der eine ausführliche Antwort auf Land und Krause ist, wird ein neuer Angriff gemacht auf Kants Theorie vom apriorischen Ursprung der euklidischen Axiome. Dieser Anhang ist wichtig, weil Helmholtz sich darin bemüht, seine Theorie unabhängig zu machen von einer realistischen Hypothese, und so dem Vorwurf Lands zu entgehen sucht (Mind, Bd. II, S. 39, 1877), dass die Naturforscher keinen Unterschied machen zwischen „Objektivität" und „Realität". Daher sagt Helmholtz, er wolle die Konsequenzen entwickeln, zu denen Kants Hypothese uns führen würde, in § 1, unter der Annahme der realistischen Hypothese, „um die einfache und selbstverständliche Sprache des gewöhnlichen Lebens und der Naturwissenschaft reden zu können" (S. 394), während er im zweiten Paragraphen diese Hypothese fallen lassen wolle. Da Helmholtz hier offenbar seine Hauptanstrengung gemacht hat, die philosophischen Einwände zu beantworten, wird es nötig sein, diesen Anhang etwas ausführlicher zu besprechen.

Wir unterscheiden, sagt Helmholtz, zwischen Gleichheit und Kongruenz im transscendentalen oder Kantischen Sinne und „Physischer Gleichwertigkeit", welche durch Übertragung starrer Körper, wie der Zirkel und Massstäbe, bestimmt wird (S. 395). Selbst der Kantianer muss zugeben, dass es möglich sein würde, auf so ermittelte „Physische Gleichwertigkeit" eine rein erfahrungsmässige Geometrie zu gründen, die Helmholtz eine „Physische Geometrie" nennt. Eine solche Geometrie würde durchaus den Charakter einer Naturwissenschaft haben. „Aber Kants Anhänger behaupten,

dass es neben einer solchen physischen auch eine reine Geometrie gäbe, die allein auf transscendentale Anschauung gegründet sei. . . . . Bei dieser hätten wir es garnicht mit physischen Körpern und deren Verhalten bei Bewegungen zu tun, sondern wir könnten, ohne durch Erfahrung von solchen irgend etwas zu wissen, durch innere Anschauung uns Vorstellungen bilden, von absolut unveränderlichen und unbeweglichen Raumgrössen, Körpern, Flächen, Linien, die, ohne dass sie jemals durch Bewegung, die nur physischen Körpern zukommt, zur Deckung gebracht würden, doch im Verhältnis der Gleichheit und Kongruenz zu einander ständen.

„Ich erlaube mir hervorzuheben, dass diese innere Anschauung von Geradheit der Linien, Gleichheit der Entfernungen, oder von Winkeln absolute Genauigkeit haben müsste; sonst würden wir durchaus nicht berechtigt sein, darüber zu entscheiden, ob zwei gerade Linien, unendlich verlängert, sich nur einmal, oder auch vielleicht, wie grösste Kreise auf der Kugel, zweimal schneiden, noch zu behaupten, dass jede gerade Linie, welche eine von zwei Parallellinien, mit denen sie in derselben Ebene liegt, schneidet, auch die andere schneiden müsse. Man muss nicht das so unvollkommene Augenmass für die transscendentale Anschauung unterschieben wollen, welche letztere absolute Genauigkeit fordert.

„Gesetzten Falls, wir hätten nun eine solche transscendentale Anschauung von Raumgebilden, ihrer Gleichheit und ihrer Kongruenz, und könnten uns durch wirklich genügende Gründe überzeugen, dass wir sie haben: so würde sich allerdings daraus ein System der Geometrie herleiten lassen, welches unabhängig von allen Eigenschaften der physischen Körper wäre, eine reine, transscendentale Geometrie. Auch diese Geometrie würde ihre Axiome haben. Es ist aber klar, auch nach Kantschen Prinzipien, dass die Sätze dieser hypothetischen reinen Geometrie nicht notwendig mit denen der physischen übereinzustimmen brauchten. Denn die eine redet von Gleichheit der Raumgrössen in innerer Anschauung,

die andere von physischer Gleichwertigkeit. Diese Letztere hängt offenbar ab von empirischen Eigenschaften der Naturkörper und nicht blos von der Organisation unseres Geistes.

„Dann wäre also zu untersuchen, ob die beiden besprochenen Arten der Gleichheit notwendig immer zusammenfallen. Durch Erfahrung ist darüber nicht zu entscheiden (S. 396—397). . . . .

„Gesetzten Falls endlich, dass die physische Geometrie eine Reihe allgemeiner Erfahrungssätze gefunden hätte, die mit den Axiomen der reinen Geometrie gleichlautend wären: so würde daraus höchstens folgen, dass die Übereinstimmung zwischen physischer Gleichwertigkeit der Raumgrössen und ihrer Gleichheit in reinen Raumanschauungen eine zulässige Hypothese sei, die zu keinem Widerspruche führt. Sie würde aber nicht die einzig mögliche Hypothese sein. Der physische Raum und der Raum der Anschauung könnten sich zu einander auch verhalten, wie der wirkliche Raum zu seinem Abbild in einem Konvexspiegel.

„Dass die physische Geometrie und die transscendentale nicht notwendig übereinzustimmen brauchen, geht daraus hervor, dass wir sie uns tatsächlich als nichtübereinstimmend vorstellen können“ (S. 398).

Helmholtz zeigt dann wieder, wie der pseudosphärische Raum mittels der Abbildung Beltramis dargestellt werden kann, und meint, dies würde nicht möglich sein, wäre der Beobachter „mit angeborenen Formen der Raumanschauung“ ausgerüstet (S. 399). Helmholtz schliesst:

„Wenn es wirklich eine uns angeborene und unvertilgbare Anschauungsform des Raumes mit Einschluss der Axiome gäbe, so würden wir zu ihrer objektiven wissenschaftlichen Anwendung auf die Erfahrungswelt erst berechtigt sein, wenn durch Beobachtung und Versuch konstatiert wäre, dass die nach der vorausgesetzten transscendentalen Anschauung gleichwertigen Raumteile auch physisch gleichwertig seien“ (S. 400).

In § 2 (S. 401) sagt Helmholtz, er wolle die realistische Hypothese fallen lassen und nur das Kausalgesetz beibehalten, das für alle Wissenschaft notwendig ist, nämlich, dass unsere Wahrnehmungen einen realen, aber unbekannten Grund haben, durch den ich an diesem besonderen zeitlichen oder räumlichen Punkt eher solche und solche Wahrnehmungen habe, als andere. Diese realen aber unbekannten Bedingungen, welche die besonderen räumlichen Punkte bestimmen, an denen gewisse Wahrnehmungen erscheinen sollen, nennt er die „Topogenen Momente" (S. 402). Diejenigen, welche bestimmen, an welchen besonderen Zeitpunkten diese Wahrnehmungen erscheinen sollen, nennt er die „Hylogenen Momente" (S. 403). Dann stellt Helmholtz die Behauptung auf:

„Wenn wir nun irgend etwas wahrnehmen und behaupten, was eine gegenseitige Abhängigkeit von Raumgrössen aussagt, so ist zweifelsohne der tatsächliche Sinn einer solchen Aussage nur der, dass zwischen gewissen topogenen Momenten, deren eigentliches Wesen uns aber unbekannt bleibt, eine gewisse gesetzmässige Verbindung stattfindet, deren Art uns ebenfalls unbekannt ist. Eben deshalb sind Schopenhauer und viele Anhänger von Kant zu der unrichtigen Folgerung gekommen, dass in unseren Wahrnehmungen räumlicher Verhältnisse überhaupt kein realer Inhalt sei, dass der Raum und seine Verhältnisse nur transscendentaler Schein seien, ohne dass irgend etwas Wirkliches ihnen entspräche" (S. 403).

Daher nimmt Helmholtz an, dass, wenn ein Ausspruch überhaupt einen Sinn haben soll, er sich irgendwie auf äussere Realität beziehen muss. Das heisst aber nur, die realistische Hypothese wieder behaupten, die er fallen lassen wollte. Blos die sinnlichen Qualitäten unserer Wahrnehmungen subjektiv zu machen, macht nicht schon den Idealisten aus. Locke hat dies schon getan: doch niemand nennt ihn einen Idealisten. Andererseits behaupten, dass die Zeit- und Raumbeziehungen unserer Wahrnehmungen

ein objektives Gegenstück haben müssen, selbst wenn diese nicht identische, sondern nur entsprechende Beziehungen zu sein brauchen, und behaupten, dass dies die einzige Bedingung ist, unter der sie nicht als transscendentaler Schein anzusehen sind, heisst die realistische Hypothese verfechten. Überdies wird dies objektive Gegenstück, diese wirkliche Gesetzmässigkeit nicht länger die transscendentale und unkennbare Ursache unserer Wahrnehmungen im philosophischen Sinne, sondern wird eine Art physischer Welt. Dass sie Helmholtz in der Tat als solche auffasst, geht aus folgendem Zitat hervor: „Wir sind aber jedenfalls berechtigt, auf unsere räumlichen Wahrnehmungen dieselben Betrachtungen anzuwenden, wie auf andere sinnliche Zeichen, z. B. die Farben. Blau ist nur eine Empfindungsweise; dass wir aber zu einer gewissen Zeit in einer bestimmten Richtung Blau sehen, muss einen realen Grund haben. Sehen wir zu einer Zeit dort Rot, so muss dieser reale Grund verändert sein“ (S. 403). Dass dies Helmholtz' Auffassung ist, ist auch deutlich gleich aus dem Anfang von § 2 zu entnehmen, wo er Lands Beschuldigung zurückweist, Helmholtz habe vorausgesetzt, „that empirical knowledge is acquired by simple importation or by counterfeit. . . .“ Helmholtz meint: „Wenn Herr Prof. Land meine Arbeiten über Sinnesempfindungen gekannt hätte, würde er gewusst haben, dass ich selbst mein Leben lang gegen eine solche Voraussetzung wie er mir unterschiebt, gekämpft habe.“ Aber der transscendentale Grund der Erscheinungswelt im philosophischen Sinne ist nicht zu verwechseln mit dem unmittelbaren physischen Objekt unserer Wahrnehmungen. Diesen kommt kein höherer Grad der Realität zu als den Empfindungen selbst, vielleicht sogar ein niedrigerer. Es gibt einige, die sogar behaupten, die physische Welt sei überhaupt eine Welt der Nicht-Realitäten, da sie nur eine erschlossene Welt ist.[1])

---

1) Ernst Mach z. B. behauptet, dass wir kein Recht haben, über unsere Empfindungen hinauszugehen und auf eine, diesen zu Grunde

Ihr oder ihrer Gesetzmässigkeit einen höheren Grad der Realität zuzuschreiben, heisst die realistische Hypothese im eigentlichsten Sinn behaupten. Gerade wie er nie aus seinen euklidischen Anschauungen herauskommt, so kommt Helmholtz niemals über die physische Welt der Erscheinungen hinaus, innerhalb der er sich immer bewegt.

Ganz klar ist diese Verwechslung auch in seinem Schluss. Weil seine physische Geometrie uns über physische Körper belehrt, so schliesst er, dass sie deshalb „Sätze von realem Inhalt enthalte“ (S. 404), indem er mit diesem „realen Inhalt“ Unterweisung über die Verhältnisse der topogenen und hylogenen Momente der realen Welt meint. Daher schliesst er, dass die Axiome dieser Geometrie „bestimmt werden nicht von blossen Formen des Vorstellens, sondern von Verhältnissen der realen Welt“ (S. 404).

Helmholtz ist es also nicht gelungen, sich von der realistischen Hypothese zu befreien, die die wahre Grundlage seiner Ansichten ist, und ihn dazu führt, die Geometrie nach Kants Theorie als „Transscendentalen Schein“, seine eigene „Physische Geometrie“ als die einzige anzusehen, die einen „realen Inhalt“ haben kann.[1]) Nichtsdesto-

liegende physische Welt der Atome und Kräfte zu schliessen. Die Aufgabe der Physik besteht nach ihm nun darin, die gegenseitigen Beziehungen der Elemente unserer Empfindungen, die uns allein unmittelbar gegeben sind, zu ermitteln und mathematisch darzustellen. Siehe seine „Mechanik“, „Analyse der Empfindungen“, „Theorie der Wärme“, „Erkenntnis und Irrtum“, 1902 u. s. w.

Ähnlich behauptet James, die Welt der Physiker sei nur eine Auffassungsweise des Gegebenen, welche ihre Berechtigung nur darin findet, dass sie den Zwecken des Physikers angepasst ist. Aber ihr kommt kein höherer Grad der Realität zu, als irgend einer anderen Auffassungsweise, selbst der sinnlosesten. Die Welt, sagt er, ist keineswegs als wirklicher und wesentlicher, aus Atomen und Kräften bestehend, aufzufassen, als sie wesentlich und wirklich als ein Ort, wo meine Nase kitzelt, zu definieren ist. (S. „Principles of Psychology“, Vol. II, Cap. XXII: „What is meant by a Mode of Conceiving“. S. 332—337, bes. d. Anm. zu S. 335, 336.)

1) Die Naturwissenschaften scheinen in der Tat immer mehr oder weniger an eine realistische Hypothese gebunden zu sein. Der Physiker ist mehr oder weniger daran gewöhnt, seine Welt der Atome und Kräfte

weniger meint er, dass die topogenen Momente vielleicht direkt auf uns wirken und so eine Geometrie in uns hervorbringen könnten, gegründet auf transscendentale Anschauung im Kantischen Sinne, jedoch übereinstimmend mit der physischen Geometrie. Aber wenn dies selbst der Fall wäre, meint Helmholtz, könnte die Tatsache dieser Übereinstimmung nur empirisch festgestellt werden. Sie würde aufzufassen sein als ein Naturgesetz oder als eine „praestabilierte Harmonie zwischen der Vorstellungswelt und der realen Welt“ (S. 404).

Daher schliesst Helmholtz, dass wir weder bei der realistischen noch bei der idealistischen Hypothese dieser Notwendigkeit einer empirischen Bestätigung unserer Geometrie entgehen können. Er schliesst, dass nur seine physische Geometrie direkt und unzweifelhaft auf die physische Welt anwendbar ist, dass nur was aus der Erfahrung abgeleitet wird, sicher auf die Erfahrung anwendbar ist. Er sagt daher:

„Dagegen ist die Annahme einer Kenntnis der Axiome aus transscendentaler Anschauung:

---

als eine Art realen Grund der Erscheinungswelt zu betrachten. Durch sie erklärt er die Erscheinungen; aus ihr leitet er die Erscheinungen ab. Er betrachtet sie daher als etwas Ursprünglicheres als die Erscheinungen. Letztere sind vorübergehend veränderlich; die Atome und Kräfte dagegen werden als unveränderlich ewig gedacht. Durch diese ihre Beharrlichkeit scheinen sie als etwas Realeres als die wechselnden Erscheinungen, die sie hervorbringen. So ist der Physiker geneigt, diese von ihm geschaffene Welt, wenn nicht als den letzten Grund der Erscheinungen, doch immerhin als eine Annäherung daran zu betrachten. Zwar weiss er wohl, dass er diese Welt nicht direkt beobachten kann, dass er nur aus den Erscheinungen darauf geschlossen hat, dass er daher nichts mit Sicherheit darüber wissen kann, dass alles, was er darüber sagt, nur Hypothesen sind, — aber es sind eben Hypothesen über die Beschaffenheit der wirklichen Welt, der Welt, welche unabhängig ist von dem Trug und Schein der Sinnesempfindungen. Diese Idee einer absoluten Wahrheit, die da draussen unabhängig von uns besteht, die er allerdings niemals zu erreichen hoffen kann, der er sich aber durch seine Untersuchungen zu nahen gedenkt, ist es, welche den Physiker immer

1. eine unerwiesene Hypothese;

2. eine unnötige Hypothese, da sie nichts in unserer tatsächlichen Vorstellungswelt zu erklären vermag, was nicht auch ohne ihre Hilfe erklärt werden könnte;

3. eine für die Erklärung unserer Kenntnis der wirklichen Welt gänzlich unbrauchbare Hypothese, da die von ihr aufgestellten Sätze auf die Verhältnisse der wirklichen Welt immer erst angewendet werden dürfen, nachdem ihre objektive Giltigkeit erfahrungsmässig geprüft und festgestellt worden ist.

Es muss zugestanden werden, dass mit dem blossen Vorhandensein einer auf transscendentale Anschauung gegründeten Geometrie ihre Anwendbarkeit auf die physische Welt noch nicht gegeben ist. Auch ist Helmholtz seinen mathematischen Vorgängern voraus, indem er erkennt, dass die transscendentale Anschauung im Kantischen Sinne etwas ganz anderes ist, als das blosse Ansehen der Figuren oder ihre Reproduktion in der Einbildung. Gauss und Lobatschefsky kannten nur das Letztere, das sie immer mit der transscendentalen Anschauung verwechselten. Helmholtz allein erkennt, dass die „reine" Anschauung bei

zu seinen Arbeiten geführt hat, und welche seine beständige Inspiration dabei gewesen ist. Sie ist die Voraussetzung, welche allein, wie er glaubt, seinen Arbeiten einen realen Inhalt, einen Wert verleiht.

Dagegen muss aber gesagt werden, dass das Fallenlassen dieser realistischen Hypothese die Naturwissenschaften keineswegs ihres Wertes beraubt, wie der Physiker vielfach glaubt. Obwohl man dann nicht mehr durch sie näher an das wahre Wesen der Dinge zu kommen hoffen kann, so bleiben sie doch für uns mit die wertvollsten aller unserer Kenntnisse. Wir sind durch sie nicht nur in den Stand gesetzt, die Zukunft vorauszusagen, die Vergangenheit zu rekonstruieren, die Naturkräfte daher den praktischen Zwecken der Menschen dienstbar zu machen, sondern sie ermöglichen die Naturerscheinungen in ein einheitliches, übersichtliches, festes Begriffssystem umzuwandeln, welches der Geist vollständig beherrschen kann, worin er seine Ruhe und Befriedigung findet. Es hat nichts zu sagen, dass dieses System keinen Anspruch auf reale Geltung erheben kann. Es genügt, dass es unseren Zwecken und unseren Bedürfnissen angepasst ist. Und das ist es in hohem Grade.

Kant etwas ganz anderes ist, obwohl er die Existenz einer solchen verneint. Aber ich meine, dass Helmholtz die Rolle dieser Anschauung völlig verkannt hat. Kant hätte sicher nicht die Geometrie auf einer Art Anschauung begründet, welche garnichts mit der Aussenwelt zu tun hätte. Das war vielmehr der Fehler Lockes, den Kant zu überwinden suchte. Ich muss daher diese ganze Betrachtung von Helmholtz vielmehr als eine vorzügliche und scharfsinnige Kritik der Ansicht Lockes als eine Widerlegung Kants auffassen. Locke war es, nicht Kant, der die Geometrie rein aus dem Kopf konstruieren wollte.[1]) Nach ihm hat sie zunächst gar keinen Zusammenhang mit der Erfahrung. Erst wenn wir in der Erfahrung Objekte finden, die mit unseren mathematischen Begriffen übereinstimmen, dürfen wir die Sätze der Mathematik auf die Erfahrung anwenden, aber nur soweit, als die gefundenen Objekte mit dem a priori aufgestellten Begriffen übereinstimmen. Nach Locke besteht also kein notwendiger Zusammenhang zwischen Mathematik und Erfahrung. Wir können vielleicht entsprechende Objekte finden, aber das wird durch seine Theorie nicht garantiert. Es könnte die Erfahrung ebenso gut, so viel wir wissen, unserer Mathematik widersprechen. Da also hier in der Tat jeder Satz in Bezug auf seine objektive Giltigkeit erst geprüft werden muss, bevor wir ihn auf die Wirklichkeit anwenden dürfen, so ist es gewiss nicht ersichtlich, was für einen Zweck die Geometrie bei Locke überhaupt hat. Da unser ganzes Interesse auf die empirische Anwendbarkeit gerichtet ist, so ist es wirklich nicht einzusehen, wie Riehl bemerkt,[2]) warum wir die Sätze der Geometrie nicht direkt empirisch ableiten.

Nun soll Kant diesen Fehler dadurch verbessert haben, dass er unsere euklidische Anschauung zu einer

1) Siehe Locke's Essay concerning the Human Understanding. Bk. IV, chap. IV, §§ 5—6.

2) Riehl, Der Philosophische Kritizismus. Bd. I, S. 95.

Eigenschaft unserer Wahrnehmung macht. Weil es in unserer Natur liegt, die Dinge so wahrzunehmen, daher kann uns nichts vorkommen, ohne dass es sich den Gesetzen unserer Anschauung unterwirft. Der ganze Nachdruck wird bei der Kantischen Lehre auf die Subjektivität der Gesetzmässigkeit der Erscheinungen gelegt, nicht auf die Subjektivität der Raumqualität der Empfindungen. Wenn Helmholtz Letzteres als Kants Meinung auffasst, so hat er ihn völlig missverstanden. Kant war nicht der erste Nativist. Sein Interesse ist überhaupt nicht psychologisch, aber die Frage, ob die Raumqualität unserer Empfindungen ursprünglich und angeboren oder empirisch erworben ist, ist eine rein psychologische und hat nichts mit der erkenntnistheoretischen Frage zu tun. Diese betrifft lediglich die Gesetzmässigkeit unserer Anschauung, ob diese Gesetzmässigkeit subjektiv oder objektiv ist. Helmholtz hat, indem er die Kantische Doktrin auf die psychologische Frage nach dem Ursprung der räumlichen Qualitäten unserer Wahrnehmungen bezieht, den ganzen Sinn dieser Doktrin verfehlt. Indem er diese räumlichen Qualitäten subjektiv, die Gesetzmässigkeit unserer Wahrnehmungen aber objektiv machte, brachte er jene unüberbrückbare Kluft zwischen Anschauung und Erfahrung selbst hervor, die nur das, was von der Erfahrung abgeleitet wird, als auf die Erfahrung anwendbar anerkannt, die Geometrie nach Kant als einen transscendentalen Schein hinstellt. Aber die Anschauung behält diese isolierte Stellung bei Kant nicht bei. Indem Kant die Gesetzmässigkeit derselben zu unserer Eigenschaft macht, zwingt er die Erfahrung, damit übereinzustimmen. Auf Grund dieser Hypothese allein kann in der Tat ein notwendiger und nicht bloss zufälliger Zusammenhang zwischen Erfahrung und Geometrie bestehen.

Fassen wir unsere Bemerkungen über Helmholtz nochmals zusammen: Obwohl Helmholtz als Mathematiker von geringerer Bedeutung ist als seine Vorgänger,

so ist er als Philosoph von weit grösserer Bedeutung. Er war der erste, der das Wesen der philosophischen Schwierigkeiten einigermassen erkannte und sie zu beseitigen suchte. Der Versuch, die neuen Theorien auch zu popularisieren, sie ihres formelhaften, mathematischen Gewandes zu entkleiden und ihren eigentlichen Sinn in einfacher und verständlicher Sprache wiederzugeben, brachte viele der darin enthaltenen philosophischen Schwierigkeiten ans Licht, die sonst nur mit Mühe entdeckt worden wären. Denn so klar und genau die mathematische Sprache auch als Mittel für den Ausdruck quantitativer Verhältnisse sein mag, so birgt eine stattliche Reihe von symbolischen Formeln manchmal einen erstaunlich geringen Ertrag an Bedeutung. Diese relative Ertragslosigkeit kann nur durch den Versuch blossgelegt werden, die Formeln in die gewöhnliche Sprache zu übertragen.

Von grosser Wichtigkeit ist auch die Tatsache, dass Helmholtz' Empirismus nach seinen eigenen Äusserungen nicht von mathematischen, sondern von physiologischen Betrachtungen ausging, die bis auf das Jahr 1855 zurückweisen (siehe oben S. 73, Anmerk.). In der Mathematik werden seine empirischen Ansichten lediglich angewendet. Daher haben wir bei ihm eine ausdrückliche Bestätigung dessen, was wir bei andern haben folgern müssen, nämlich, dass ihr Empirismus eine Voraussetzung, nicht ein Resultat ihrer mathematischen Arbeiten war.

§ 14. Kritiker und Nachfolger von Helmholtz.

Helmholtz ist auch deshalb von sehr grosser Bedeutung, weil durch sein hohes Ansehen und durch seinen populären Stil die neuen Theorien eine viel weitere Verbreitung erlangten, als es sonst geschehen wäre, und weil sie so besonders zur Kenntnis der Philosophen gebracht wurden. Dies veranlasste allerdings einen gewaltigen Sturm

der Polemik von Seiten der letzteren. Hier beginnt also die philosophische Kritik. Die bedeutendsten unter diesen ersten Kritikern von Helmholtz waren: J. K. Becker (1870 bis 1876), Tobias (1875), Land (1877), Krause (1878), Weissenborn (1878), Stallo (1881), Jacobson (1883). Andere, die nur gelegentlich die Ansichten von Helmholtz und Riemann besprochen haben, sind: Dühring (1869 bis 1875), Sigwart (1878), Schmitz-Dumont (1878), Lotze (1879), Riehl (1879), Wundt (1880).[1]

Andererseits schlosssen sich einige Philosophen den neuen Theorien an. Der bedeutendste unter diesen ist Benno Erdmann, der in seinem höchst wichtigen Werk: „Die Axiome der Geometrie", Leipzig 1877, die Theorien von Helmholtz und Riemann mit Begeisterung darlegte und sie philosophisch und logisch zu begründen suchte. Andere, die diese Theorien angenommen haben, sind: O. Liebmann (1877), Zur Analysis der Wirklichkeit, Medicus (1898) etc.

Auf Seiten der Mathematiker gewannen die neuen Theorien von jetzt an immer mehr an Ansehen und die philosophische Kritik schwand allmählich, wenn auch nicht gänzlich dahin. Viele der ursprünglichen Irrtümer von Helmholtz und Riemann sind von den Mathematikern verbessert worden, und die mathematische Seite der Theorien, die von ersteren unvollkommen gelassen worden war, wurde weitergeführt und in ein grossartiges zusammenhängendes System gebracht. Die Mathematiker, welche sich besonders mit dem mehrdimensionalen Krümmungsmass beschäftigt haben, sind Kronecker, Christoffel, Lipschitz, Killing etc.[2] Leider ist Riemanns Verallgemeinerung des Gaussschen

---

1) Wegen der genauen Titel siehe das Literaturverzeichnis am Ende dieser Abhandlung. Viele von diesen früheren Autoren werden wir nicht Gelegenheit haben zu erwähnen. In Bezug auf diese Autoren bis 1877 siehe Erdmann, „Die Axiome der Geometrie".

2) Siehe Anm. zu Wangerins Übersetzung von Gauss' Disquisitiones in Ostwalds Klassiker, No. 5, S. 95.

Krümmungsmasses nicht die einzigmögliche. Andere sind vorgeschlagen worden, und es scheint keine Möglichkeit zu geben, unter ihnen endgültig zu entscheiden. Eine jedoch, die von R. Beez vorgeschlagen ist (Math. Annal., Bd. VIII, S. 387 und Schlömilchs Ztschr. f. Math. und Phys., Bd. XX, 1875), scheint einige Vorzüge, mindestens den grösserer Einfachheit, zu haben. Nach der Riemannschen Verallgemeinerung würde eine **n**-dimensionale Mannigfaltigkeit **n**! Krümmungsradien haben, nach Beez' Verallgemeinerung würde sie nur **n** haben.

Die analytische Arbeit von Helmholtz betreffs seiner Begründung von Riemanns verallgemeinerten pythagoreischen Lehrsatz ist verbessert und entwickelt von Sophus Lie und in Beziehung gebracht mit seiner „Gruppentheorie". Lie hat, indem er Helmholtz' Ausspruch annahm, dass die Geometrie die Bewegungen starrer Körper im Raum untersuche, gezeigt, dass die möglichen Bewegungen eines Körpers im euklidischen Raum eine „Gruppe" bilden. Zugleich hat er gezeigt, dass Helmholtz' Axiom der konstanten Grösse bei Drehung überflüssig ist, diese Gruppe zu charakterisieren, da es aus den anderen Axiomen folgt. Die in dem Lobatschefskyschen und den Riemannschen Raum möglichen Bewegungen bilden zwei andere Gruppen. Im allgemeinen wird angenommen, dass jeder der anderen Bewegungsgruppen eine besondere Art des Raumes entsprechen wird, in welchem die besondere Art von Bewegungen, die die Gruppe bilden, allein möglich sein wird. So gibt diese Theorie sozusagen ein Prinzip, nach welchem ein vollständiges Inventar von allen den möglichen Arten des Raumes aufgestellt werden kann. Lie hat sein Werk in drei starken Bänden niedergelegt: „Theorie der Transformationsgruppen", Leipzig 1888, 1890, 1893. Seinen Resultaten wird heutzutage fundamentale Bedeutung für die Grundlagen der Mathematik zuerkannt. Die Reichhaltigkeit und Tiefe dieses Werkes hat ohne Zweifel viel dazu beigetragen, das Vertrauen zur nichteuklidischen Geometrie heutzutage zu stärken.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass seine mathematische Schönheit und Vollkommenheit keine Garantie bietet für die Existenz anderer Räume als des unsrigen, die den andern möglichen Gruppen entsprächen und die Eigenschaften hätten, die durch diese angezeigt sind. Dies ist eine blosse Annahme und sie ist keineswegs sicherer, als Helmholtz' Ausspruch, worauf sie sich gründet, nämlich, dass die Geometrie die Untersuchung des Verhaltens der Körper in Bewegung sei. Nur wenige Punkte bei Helmholtz sind von den Philosophen und sogar von den Mathematikern mehr mehr bestritten worden, als dieser. Wir werden das später sehen.

§ 15. Die mehrdimensionale Geometrie.

Um diese Zeit begann auch die mehrdimensionale Geometrie ausgebildet zu werden, besonders die von vier Dimensionen. Auf die Möglichkeit solcher Geometrie und die Methode dafür durch Verallgemeinerung gewisser Sätze, die für eine, zwei und drei Dimensionen gelten, nach Analogie auf **n** Dimensionen, wurde zuerst von Grassmann in seiner Ausdehnungslehre von 1844[1]) hingewiesen. Grassmann zeigt, dass die Sätze der Geometrie eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, welche wegen ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet. Zum Beispiel: Zwei Gerade derselben Ebene oder eine Ebene und eine Gerade schneiden einander in einem Punkt, vorausgesetzt, dass sie nicht zusammenfallen. Ebenso zwei Ebenen, die nicht zusammenfallen, schneiden einander in

1) Unabhängig davon auch von Fechner als ein philosophischer Scherz 1846, „Kleine Schriften von Dr. Mises". „Vier Paradoxa", Bd. IV. „Der Raum hat vier Dimensionen". Auch die Methode, die Merkmale des vierdimensionalen Raumes durch Analogie zu erhalten, wurde von Fechner gefunden. Die Möglichkeit, die analytische Geometrie auszudehnen, wurde gleichfalls unabhängig von den übrigen von Cayley gefunden sowie von George Boole, „Laws of Thought", 1854, S. 175.

einer Geraden. Nennen wir nun den Punkt, die Gerade, die Ebene und den Körperraum Gebiete bezw. von erster, zweiter, dritter und vierter Stufe, dann finden wir im Allgemeinen, dass, wenn ein Gebiet von a^{ter}, und eins von b^{ter} Stufe in ein Gebiet von c^{ter}, aber in keins von niedrigerer Stufe vereinigt werden, beide Gebiete ein Gebiet von $(a + b - c)^{ter}$ Stufe gemein haben.[1]) Nach Grassmann liegt kein Grund vor, warum dies Gesetz, welches für Gebiete von erster, zweiter, dritter und vierter Stufe oder soweit die Anschauung es kontrollieren kann, gilt, nicht auch für Gebiete höherer Stufen gelten sollte. Daher müssen wir annehmen, dass es dies tut, und mittels dieser Annahme werden die Bestimmungen von vier- und n-dimensionalen Räumen erreicht. Wenden wir dies Prinzip nun auf einen Raum von vier Dimensionen an, so finden wir, dass ein dreidimensionaler Raum durch eine Linie, die nicht in ihm liegt, in einem einzelnen Punkt, und ebenso durch eine Ebene, die nicht in ihm liegt in einer Linie geschnitten wird. In Bezug auf einen Raum von höheren Dimensionen verhält sich denn ein dreidimensionaler Raum wie eine Fläche. Aus diesem Grunde sind die neueren Metamathematiker dazu gekommen, von dreidimensionalen Flächen zu reden.

Durch weitere Anwendung solcher Analogien können wir ein vier- oder n-dimensionales Koordinatensystem aufstellen und viele interessante Lehrsätze entwickeln, die zur mehrdimensionalen Geometrie gehören. Von besonderer Wichtigkeit unter diesem sind die Lehrsätze von der Symmetrie geworden, besonders die Sätze über die enantiomorphen Körper.[2]) Ausser der ebenen mehrdimensionalen

---

1) Grassmann, Ausdehnungslehre, 2. Aufl., Anhang III, S. 278, 1878. Einen Auszug daraus gibt Killing, Bd. I, S. 176—179.

2) Siehe G. Lechalas, Introduction à la géométrie générale, S. 2—7. Sehr interessant sind auch die Sätze von den Polytopen oder den mehrdimensionalen regelmässigen Körper, welche von Stringham (in Amerika)

Geometrie gibt es auch die gekrümmte oder nichteuklidische. Diese ist aber so ungemein kompliziert, dass sie wenig bearbeitet worden ist. Interessant ist aber zu bemerken, dass die nichteuklidischen Geometrien von drei Dimensionen identisch sind mit den Geometrien von gekrümmten dreidimensionalen Gebilden des vier-dimensionalen Raumes. Manche Sätze der nichteuklidischen Stereometrie lassen sich auch bequemer mit Hülfe des vier-dimensionalen Raumes ableiten. Helmholtz z. B. beginnt mit der Gleichung einer drei-dimensionalen Kugelfläche $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$ und eliminiert nachher eine der Variablen. Von einer solchen „Hülfskugel" machen Beltrami und Klein häufig Gebrauch.

Der Umstand, dass die mehrdimensionale Geometrie auf blossen Analogieschlüssen aufgebaut wird, hat manche Philosophen dazu geführt, ihre Berechtigung zu verneinen. Besonders zu erwähnen sind in dieser Hinsicht Wundt (Logik I, S. 494, 1880) und Kroman (Unsere Naturerkenntnis, S. 153, 1881). Andererseits findet Medicus in der blossen Möglichkeit solcher Analogien ihre Rechtfertigung (Kant und die nichteuklidische Geometrie, Dissertation, Jena 1898, S. 21). Die ganze Frage scheint mir lediglich eine Frage der Interpretation zu sein. So lange wir die Geometrie, welche mit Hülfe solcher Analogien aufgestellt wird, blos als ein interessantes aber völlig imaginäres System von Lehrsätzen auffassen, ist sie völlig berechtigt. Sobald wir aber weiter gehen und behaupten, dass, weil eine solche vier-dimensionale Geometrie existiert, auch ein ihr entsprechender vier-dimensionaler Raum muss existieren können, haben wir mehr behauptet als unsere Prämissen uns berechtigen und alsdann treiben wir Metaphysik. Auch wenn wir auf einem anderen Wege erkannt hätten, dass ein vier-dimensionaler Raum möglich wäre, so

---

und Schlegel entwickelt wurden. Siehe auch P. Schoute, Mehrdimensionale Geometrie. Sammlung Schubert, Bd. 35, 36, 1902/05.

könnten wir nicht wissen, ob die Sätze unserer vier-dimensionalen Geometrie darauf Anwendung fänden. Denn diese Sätze beruhen blos auf äusserlicher Analogie. Wenn wir behaupten wollten, dass die Geometrie dieses vier-dimensionalen Raumes notwendig damit übereinstimmen müsste, so würden wir genau so verfahren, als wenn wir aus der Tatsache, dass $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, schliessen wollten, dass $(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$ ist, worauf Kroman hingewiesen hat. (Unsere Naturerkenntnis, S. 153.) Nur dann wären wir zu jener Behauptung berechtigt, wenn wir eine direkte Anschauung des vier-dimensionalen Raumes hätten, welche die Richtigkeit unserer Analogieschlüsse bestätigte.

Ob die **n**-dimensionale Geometrie berechtigt ist oder nicht, kommt also lediglich darauf an, ob wir eine metaphysische Interpretation davon machen oder nicht. Doch sind die metaphysischen Möglichkeiten des vier-dimensionalen Raumes zu gross, als dass manche phantasiereiche Physiker es hätten unterlassen könen, merkwürdige Theorien darauf zu bauen. Unter diesen nennen wir nur Zöllner, der den vier-dimensionalen Raum zur Erklärung von spiritualistischen Erscheinungen benutzt,[1] und Pearson und Clifford, die ihn zur Erklärung der Materie benutzen.[2]

Gegen alle jene Theorien, welche die gegenwärtige Welt als Teil einer vier-dimensionalen Welt erklären wollen, ist folgendes zu bemerken. Wenn eine vierte Dimension existiert, dann ist, wie oben S. 88 gezeigt ist, unser Raum nur ein Gebilde in dem vier-dimensionalen Raum, und ist, hierauf bezogen, unendlich flach, gerade wie eine zwei-dimen-

1) Zöllner, Wissenschaftliche Abhandlungen. Leip. 1878. Siehe auch Vorrede zu „Prinzipien einer elektrodynamischen Theorie der Materie". Leip. 1876.

2) Karl Pearson, The Grammar of Science". London 1900, S. 267—270. Die famose Ether-squirt Theory. Ernst Mach scheint aber der erste auf diesem Gebiet gewesen zu sein; siehe „Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit". Prag 1872.

sionale Fläche es inbezug auf unseren Raum ist.[1]) Nun unterscheidet sich ein solches Gebilde keineswegs von dem umgebenden Raum, in dem es sich findet, da es nichts weiter als eine ideale Grenze in diesem Raume ist. Man kann von einem solchen Gebilde, wofern wir es nicht als einen physischen Körper auffassen, nicht annehmen, es habe irgend eine Wirkung auf die freie Beweglichkeit der Körper in dem Raum, in dem es sich findet. Diese müssen ebenso frei sein, sich in dem umgebenden Raum nach jeder Richtung zu bewegen, als wenn das Gebilde nicht da wäre. Wenn wir nun nicht annehmen wollen, was wir schon oben zurückgewiesen haben, dass der Raum selbst eine zwingende Kraft ausüben kann, so gibt es nichts, was einen Körper zwingen könnte, länger als einen Augenblick in diesem Gebilde zu bleiben. Ein Körper, der sich unserm Raum von aussen nähert, würde erscheinen und verschwinden, beides in einem einzigen Augenblick. Kein Körper würde in unserem Raume jemals länger als eine unendlich kleine Zeit bleiben. Wir können uns keine physischen Kräfte vorstellen, die sie dazu zwingen könnten. Solche Kräfte müssten unendlich sein; denn, da unser Gebilde unendlich flach ist, würde schon eine unendlich kleine Abweichung von ihm einen Körper ganz aus ihm herausbringen. Dasselbe würde der Fall sein, wenn dies Gebilde als physischer Körper aufgefasst würde, auf dessen (drei-dimensionaler) Fläche die Körper durch eine Anziehungskraft gehalten

---

1) So z. B. sagt George Lechalas in seiner kleinen Broschüre „Introduction à la géométrie générale", S. 18. Paris 1904: „Maintes fois on a protesté contre l'hypothèse d'êtres superficiels, en disant, que de tels êtres seraient de pures abstractions, étant infiniment minces; mais cette objection résulte de la subordination de l'intelligence à l'imagination, car, comme nous le verrons, notre espace à trois dimensions est également infiniment mince: une droite qui n'y est pas contenue le perce en un point unique. Et il en est ainsi de tous les espaces: tant qu'on y reste enfermé, ils fournissent un champ sans limites aux investigations; mais, si on les envisage dans un espace d'ordre supérieur, ils apparaissent aussi, minces qu'une simple ligne ou qu'une surface."

würden, ähnlich den Körpern auf der Erdoberfläche. Diese Anziehungskraft müsste **ebenso unendlich** sein, da ein unendlich kleiner Abstand von der Fläche einen Körper völlig uns verschwinden lassen würde. Aber unendliche Kräfte dürfen wir in einer physisch realen Welt nicht annehmen. Daher gibt es keine denkbare Art, wie Körper gezwungen sein sollten, in einem drei-dimensionalen Raum zu bleiben, wenn ein vier-dimensionaler existierte. Ähnlich würde es mit den lebenden Wesen gehen. Man könnte sagen, da diese sich selbst willkürlich bewegen, so werden sie sich nur in den von ihnen vorstellbaren Richtungen bewegen, d. h. in denjenigen, welche in unserem Raum enthalten sind. Sicherlich! Aber sie müssten es mit **absoluter Genauigkeit** tun. Sonst kommen sie hinaus in den vier-dimensionalen Raum, und sind sie einmal dort, so würden sie nie wieder den Weg zurückfinden. Denn sobald sie in diesem Raum sind, verschwindet ihre eigene Welt gänzlich, und wenn sie auch die Fähigkeit der Bewegung noch besässen, würde es nichts geben, worauf diese Bewegung gerichtet sein könnte. Sie müssten ziellos umherirren, und wenn sie nun wieder zufälligerweise in ihre eigene Welt geraten würden, würden sie, da diese unendlich flach ist, ebenso schnell auf der anderen Seite wieder hinauskommen. Unter solchen Umständen würde eine zusammenhängende Welt wie die unsrige selbstverständlich ganz unmöglich sein. Die Annahme einer realen Existenz der vierten Dimension ist daher ganz und gar unmöglich, da sie nicht nur mit unserer Erfahrung im offenbarsten Widerspruch steht, sondern da unsere Erfahrung selbst unter solcher Annahme unmöglich sein würde.

Dieses Argument kann nun zur Widerlegung der nichteuklidischen Räume benutzt werden. Es ist von vielen Philosophen hervorgehoben worden, dass die einzige verständliche und von Paradoxen freie Auffassung der dreidimensionalen gekrümmten Räume diejenige ist, die sie als Gebilde eines vier-dimensionalen ebenen Raumes darstellt. Wie

eine Linie, so meinen die Philosophen, nur in einer zweiten Dimension gekrümmt werden kann, und eine Ebene in einer dritten, so kann eine drei-dimensionale Fläche nur in der vierten Dimension gekrümmt werden.[1]) Wenn dem so wäre, dann wären die Geometrien dieser Gebilde nicht mehr selbständige, von der euklidischen unabhängige oder sogar der euklidischen übergeordnete Geometrien, sondern einfach Teile der euklidischen Geometrie selbst, der sie keineswegs widersprächen.[2]) Gegen diese Auffassung haben die Mathematiker immer den lebhaftesten Widerspruch erhoben. Sie behaupten, die drei-dimensionalen, gekrümmten Räume müssen als selbständige Räume angesehen werden, die weder für ihre Existenz, noch für ihre Erklärung des Hinweises auf eine vierte Dimension bedürfen, da das Krümmungsmass nicht eine wirkliche Krümmung bedeutet (siehe S. 47 oben). So behauptet Helmholtz: „Der Name ist nur als kurze Bezeichnung eines verwickelten Verhältnisses von dem einen Falle hergenommen, wo der bezeichneten Grösse eine sinnliche Anschauung entspricht" (Vorträge und Reden S. 18, vgl. auch S. 64 dieser Schrift).[3]) Dagegen ist zu bemerken: Wenn

---

1) Philosophen, die diese Behauptung aufgestellt haben, sind:
Weissenborn, „Die neueren Ansichten" etc., S. 452, 1878.
Riehl, „Der philosophische Kritizismus", S. 179, 1879.
Kroman, „Unsere Naturerkenntnis", S. 159, 1881.
E. Laas, „Positivismus und Idealismus", Bd. III, S. 587, 1884.
Heymans, „Zur Raumfrage", Bd. II, S. 436, 1888.
Pietzker, „Die Gestaltung des Raumes", S. 52, 1891.
Schotten, „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts", S. 120, Anm. 2.
Milau, „Aus dem Grenzgebiet" etc., S. 32, 1901.

2) Derselbe Einwand wurde, wie wir oben (S. 55) gesehen haben, von Pietzker und Kroman in Bezug auf die Beltramische Versinnlichung der Lobatschefskyschen Planimetrie gemacht.

3) Vgl. auch Klein, „Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie", Bd. I, S. 159—160. Russell, „Foundations of Geometry", S. 17, 102, 1897. Lechalas, „Géométrie générale", S. 11, 1904.

das Krümmungsmass keine wirkliche Krümmung bedeutet, so ist es schwer, anzugeben, was es überhaupt bedeutet. Der Mathematiker sagt: es bedeutet nur ein gewisses Massverhältnis, welches dem betreffenden Raume zukommt. Wenn man aber fragt, was dieses Massverhältnis sei, so antwortet Helmholtz: eben dasjenige, was in dieser Formel ausgedrückt wird. Das ist natürlich keine wirkliche Antwort, sondern wir werden nur in einem Zirkel herumgeführt. Wenn dem Krümmungsmass kein geometrischer Sinn beigelegt werden kann, so muss man bezweifeln, ob es überhaupt irgend welche Beziehung zu dem Raum hat. Ferner ist die soeben beschriebene Auffassung der gekrümmten Räume nur die vollständige Durchführung einer gleichen Art von Analogien wie die, auf welchen die ganze mehrdimensionale Geometrie und insbesondere das mehrdimensionale Krümmungsmass beruht. Wenn einige solche Analogien erlaubt sind, warum sind es nicht alle? Das ganze System wird in der Tat ein willkürliches, wenn die Anwendung solcher Analogien erlaubt oder ausgeschlossen werden darf, jenachdem sie zu dem gewünschten Resultat führen oder nicht. Wie wir auch gesehen haben, stimmt die nichteuklidische Stereometrie mit der Geometrie solcher dreidimensionalen Gebilde völlig überein (S. 89 oben). Warum ist sie denn nicht eben die Geometrie dieser Gebilde? Die Behauptung, dass es ausserdem auch Räume gibt, die, ohne wirklich gekrümmt zu sein, doch dieselben Massverhältnisse haben, entbehrt demnach jeder Unterlage. Die Anwendbarkeit eines Krümmungsmasses auf den Raum scheint daher äusserst bedenklich.[1])

---

1) Lotze, z. B. sagt „Metaphysik", S. 262, 1879: „Es ist uns klar, was wir unter einer sphärischen oder pseudosphärischen Oberfläche zu denken haben, aber nicht, was ein sphärischer oder pseudosphärischer Raum bedeuten kann." Und ferner S. 263: „Für jede . . . . Oberfläche hat der Begriff eines Krümmungsmasses seinen guten und bekannten Sinn; aber es ist unmöglich, sich eine Eigenschaft des Raumes zu denken, auf die es Anwendung finden könnte."

Nicht als ob die Philosophen den Wert einer Naturkonstante a priori bestimmen wollten, aber sie bezweifeln, dass diese vermeintliche Konstante überhaupt einen Sinn hat. Sie wollen nicht beweisen, dass der Raum ein Krümmungsmass gleich Null hat, sondern sie meinen dass ihm überhaupt kein Krümmungsmass zukommt, eben wie es Unsinn ist, von einer krummen Farbe oder einem krummen Tone zu sprechen.[1])

Aber wenn die nichteuklidische Stereometrie nur als die Geometrie eines gekrümmten Gebildes im vier-dimensionalen ebenen Raum richtig aufzufassen ist, dann finden alle oben gegen die Annahme einer vierten Dimension erhobenen Einwände darauf ebensogut ihre Anwendung. Wir können ebenso wenig annehmen, dass unser Raum eine Krümmung haben kann, wie dass er eine vierte Dimenhaben kann. Wir müssen also schliessen, dass die nichteuklidische Geometrie, so geistreich und interessant sie auch als die Geometrie eines eigenartigen Gebildes sein mag, ebenso wenig Licht auf die Möglichkeit anders gearteter Räume als des unsrigen wirft, wie die mehrdimensionale Geometrie.[2]) Dies bleibt wie immer eine rein metaphysische Annahme, welche keineswegs aus der blossen Existenz dieser Geometrien folgt.

Ähnlich sagt Riehl, „Der philosophische Kritizismus", Bd. II, S. 173, 1879: „Man kann nicht gewisse Bedenken unterdrücken über Riemanns Übertragung des Begriffs der Krümmung von Linien und Flächen zum Raume, da wir eine geometrische Anschauung nur von gekrümmten Linien und Flächen haben können, ‚ein gekrümmter Raum dagegen in keiner Weise in unsere Vorstellung eingeht'." Vgl. S. 178.

Vgl. auch Kirschmann, Die Dimensionen des Raumes, S. 363, 1902.

1) Wie z. B. A. Krause, „Kant und Helmholtz", S. 84, und Schmitz-Dumont, „Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie", S. 142 hervorheben.

Vgl. auch Riehl, „Der philosophische Kritizismus", Bd. II, S. 162. Weissenborn, a. a. O., S. 453, und J. Schultz, „Psychologie der Axiome", S. 177.

2) Vgl. Pietzker, „Gestaltung des Raumes", S. 60, 1891.

4. Abschnitt.

Dritte Periode der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

Cayley und Klein.

§ 16. Die projektive Geometrie.

Die dritte Periode der Geschichte der Metageometrie nach Kleins Einleitung ist charakterisiert durch die Anwendung der projektiven Methoden und durch die Namen Cayley und Klein selbst. Die projektive Geometrie ist eine Entwicklung von Staudes Geometrie der Lage (1847 und Beiträge zur Geometrie der Lage 1856). Es ist seltsam, dass Cayley, der der Urheber dieser Methode war, zugleich ein eifriger Verfechter des euklidischen Raumes[1]) war, obwohl er glaubte, dass die nichteuklidische Geometrie in dem euklidischen Raum durch eine Änderung in der Definition der Entfernung zwischen zwei Punkten angewandt werden könnte.[2]) So bereitete er den Weg vor für die Entwicklungen, die später von Klein[3]) ausgeführt wurden. Cayleys Hauptaufgabe war, den Begriff der Entfernung nach rein deskriptiven Prinzipien festzustellen und so zu zeigen, dass die qualitative Geometrie der metrischen logisch vorangeht. Seine Methode tut für die Riemannsche praktisch das, was die Beltramische Projektion später (doch unabhängig von Cayley) für die Lobatschefskysche Geometrie tat. Die erstere Geometrie wie die letztere bekommen dadurch eine Abbildung im euklidischen Raum, der Art, dass ihre geodätischen Ebenen und Linien euklidische Gerade und Ebenen werden. Dies,

---

1) Russell, S. 29. Obige Darstellung ist hauptsächlich ihm entnommen.

2) „Sixth Memoir on Quantics", 1859. Philosophical Transactions. Vol. 149. Collected Papers. Vol. 2.

3) Klein, „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Annalen, Bd. 4, 1871, Bd. 6, 1873, Bd. 7, 1874, Bd. 37, 1890.

meint Klein, ist der grosse Vorzug der projektiven vor der metrischen Methode. Der philosophische Einwand, dass die Linien und Ebenen der nichteuklidischen Geometrien nicht gerade sind, ist so beseitigt. In der projektiven Geometrie sind sie tatsächlich gerade, wie in der euklidischen. Mir scheint jedoch, dass der Einwand, der oben gegen Helmholtz' Erklärung der Vorstellbarkeit des pseudosphärischen Raumes gemacht ist (siehe oben S. 68), dass es sich um eine Abbildung von einem Ding und nicht um das Ding selbst handele, auch hier zwingend ist. Womit es die projektiven Methoden zu tun haben, ist nicht die Riemannsche Geometrie selbst, sondern eine Abbildung von ihr und diese muss in ihrer Beschaffenheit von der gewählten Abbildungsmethode abhängen. Wir haben es bestimmt, dass diese Abbildung eine solche sein soll, dass die geodätischen Linien der nichteuklidischen Geometrie durch Gerade in dem euklidischen Raum dargestellt sein sollten. Aber das ist keineswegs notwendig. Eine andere Abbildung könnte ebenso gut gewählt werden,[1]) durch welche die geodätischen Linien der nichteuklidischen Geometrie mittelst krummer Linien dargestellt würden.

Aber die Projektivisten behaupten, dass ihre Abbildungsmethode etwas Ursprüngliches und Fundamentales ist, dass die projektive Geometrie die gemeinsame Grundlage aller andern Geometrien ist. Letztere unterscheiden

1) Klein nennt die drei Geometrien, die früher als Riemann'sche, Lobatschefsky'sche und euklidische oder als die Geometrien des konstanten positiven, negativen oder Null-Krümmungsmasses bekannt waren, die elliptische, hyperbolische und parabolische Geometrie. Er behauptet jedoch, es sei ein gewisser Unterschied zwischen Riemann's sphärischer und seiner elliptischen Geometrie, insofern, als sich in ersterer zwei Gerade in zwei Punkten schneiden, während in letzterer sie sich nur in einem schneiden. Er tadelt Beltrami, dass er das nicht gesehen hat. (Siehe Klein's Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie I, S. 97 ff. und S. 239 ff.) Aber diese Unterscheidung rührt, glaube ich, nur von der Projektionsmethode her, bei der nur eine Hälfte der sphärischen Fläche auf einer unendlichen Ebene abgebildet werden kann. Die andere Hälfte ist daher auf der anderen Seite der Ebene abgebildet, die

sich nur metrisch von einander. Es kommt nur darauf an, wie man den Begriff der Entfernung in die projektive Geometrie einführt. Darin ist man zunächst völlig frei, da die projektive Geometrie selbst nichts über die Natur dieses Begriffes aussagt. Sie ist völlig unabhängig von allen metrischen Beziehungen. Je nachdem man aber die eine oder die andere Definition aufstellt, wird man zu der euklidischen oder zu einer der nichteuklidischen Geometrien geführt. Diese unterscheiden sich also nur durch die Art und Weise, wie die Entfernung zwischen zwei Punkten bei ihnen definiert wird. Die hier ausgedrückte Idee ist im Wesentlichen dieselbe wie die von Riemann und Helmholtz vertretene, dass das Krümmungsmass nicht aufzufassen ist, als ob es sich auf eine wirkliche Krümmung bezöge, sondern nur als Ausdruck der verschiedenen möglichen Massverhältnisse. (Siehe S. 44, 64 oben.)

Hier entsteht aber eine Schwierigkeit. In der gewöhnlichen, oder wie die Projektivisten sie nennen, in der metrischen Geometrie wird die Entfernung zwischen zwei Punkten nur durch andere Entfernungen ausgedrückt, nämlich durch die Koordinaten des Punktes. An Stelle der gewöhnlichen Funktion der Koordinaten eine andere Funktion setzen, heisst nicht zu einer anderen Definition der Entfernung gelangen, denn eine solche Funktion der Koordinaten kann überhaupt nicht als eine Definition der Entfernung

---

somit als Doppelfläche bezeichnet werden kann wie der Ring des Möbius. So fallen die zwei Punkte, an denen zwei grösste Kreise der Kugel sich zusammentreffen, indem der eine oben, der andere auf der entgegengesetzte Seite der Ebene fällt. Aber es ist, meine ich, ein Unterschied zwischen zwei zusammenfallenden Punkten und einem einzigen Punkt. Der Anschauung nach mögen sie dieselben sein, analytisch aber sind sie schon deshalb verschieden, weil sie unterschieden werden können. Ferner, eine andere Projektionsmethode, z. B. eine, in der die Forderung, dass die geodätischen Linien der Riemann'schen Geometrie als Gerade in der euklidischen Ebene erscheinen sollten, weggelassen würde, würde die beiden Punkte als getrennt erscheinen lassen. Daher scheint es mir, die Klein'sche Unterscheidung beruht nur auf der angenommenen Projektionsmethode.

angesehen werden, weil sie die Idee der Entfernung im gewöhnlichen Sinn immer voraussetzt. Um diesem Einwand zu entgehen, behaupten die Projektivisten, dass die Koordinaten, obwohl solche in der projektiven Geometrie gebraucht werden, garnicht die gegenseitigen Entfernungen der betreffenden Punkte im gewöhnlichen Sinne bezeichnen. Sie seien im Gegenteil nur Ordnungszahlen, wodurch die verschiedenen Punkte von einander unterschieden würden. Projektive Koordinaten seien also rein deskriptive. Diese Behauptung müssen wir etwas näher prüfen.

Die Art und Weise, wie die projektiven Koordinaten aufgestellt sind, ist folgende: wir nehmen irgend drei Punkte auf einer Geraden und bezeichnen sie ganz willkürlich als 0, 1 und ∞ in der gegebenen Ordnung. Mittels einer gewissen Vierecks-Konstruktion, welche von Staudt herrührt, die ich aber hier nicht näher beschreiben kann,[1]) finden wir den harmonischen Punkt zu dem Punkt 0 in Bezug auf die Punkte 1 und ∞. Diesem Punkt fügen wir ganz willkürlich die Zahl 2 bei. Durch Wiederholung der Konstruktion finden wir dann den harmonischen Punkt zu dem Punkt 1 in Bezug auf 2 und ∞, dem wir die Zahl 3 beifügen. So fahren wir fort und bekommen ein System von Punkten, systematisch geordnet und nummeriert. Klein hat auch gezeigt, dass wir Punkte konstruieren können, welche irgend einer negativen oder gebrochenen Zahl entsprechen.[2]) Die beigefügten Zahlen entsprechen aber keineswegs den richtigen Entfernungen der Punkte vom Anfangspunkt. Sie sind vielmehr aufzufassen wie die Zahlen, die man den Büchern einer Bibliothek beifügt. Diese dienen nur dazu, die Bücher von einander zu unterscheiden und gleichzeitig ihre gegenseitigen Verhältnisse der Lage zu bezeichnen, lassen aber

---

1) Gute Beschreibungen dieser Konstruktionen werden gegeben von Klein, „Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie", S. 338 ff. Russell, „Foundations of Geometry", S. 32, 124 ff., Killing, „Grundlagen der Geometrie", S. 99—117.

2) Siehe Killing, S. 111—114.

ihre gegenseitigen Entfernungen von einander oder von der Anfangsnummer unbestimmt. Wir könnten nun diese Entfernungen ganz willkürlich definieren, wenn es nicht auf den Tatbestand ankäme. Wir könnten sie vielleicht bequem betrachten, als durch die Ordnungszahlen selbst gegeben. Das heisst, wir könnten Buch No. 200 als zweimal so weit von der Anfangsnummer betrachten, als Buch No. 100, ganz abgesehen davon, was die wirklichen räumlichen Verhältnisse sind. Ebenso könnten wir irgendwelche Funktion der Ordnungszahlen als die Entfernung definieren, und es ist klar, wenn die Bücher regelmässig in dem Raum geordnet sind, wie die Punkte der projektiven Geometrie aus ihrer Entstehungsweise es sind, so muss es eine Funktion ihrer Ordnungszahlen geben, die ihre wirklichen räumlichen Abstände von einander im euklidischen Sinn darstellt. Es muss dann andere Funktionen geben, welche die Entfernungen im hyperbolischen oder im elliptischen Sinn darstellen.

Durch diese Erörterung ist es, denke ich, klar, dass die projektiven Koordinaten den Begriff der Entfernung im metrischen Sinn nicht voraussetzen. Dass sie ihn aber in keinem andern Sinn voraussetzen, ist, denke ich, nicht wahr. Die projektiven Koordinaten ermöglichen uns zwar nicht den genauen Wert der Entfernungen zu ermitteln, aber gerade, indem sie uns die gegenseitigen Lageverhältnisse der Punkte aufweisen, unterrichten sie uns über das Grössenverhältnis der Werte untereinander. Wir wissen jedenfalls, dass der Punkt B, dessen Abszisse 4 ist, jenseits des Punktes A liegt, dessen Abszisse 2 ist, d. h. dass er weiter vom Ursprung liegt als der Punkt A, obwohl wir durch diese Koordinaten nicht wissen, um wie viel der Punkt B weiter liegt. Obwohl daher die projektive Geometrie den Begriff der Entfernung im exakten metrischen Sinn nicht benutzt, so ist sie deswegen doch nicht unabhängig von der Idee der Entfernung überhaupt, sondern sie braucht diesen Begriff, aber nur im unbestimmten Sinn.



Man kann weder sagen, dass die Lage — noch dass die Massverhältnisse der Geometrie das Primat haben. Richtung und Entfernung gehören den letzten Grundbegriffen der Geometrie an. Sie stehen ebenbürtig nebeneinander. Man kann sie weder durcheinander noch durch ein drittes definieren. Sie stellen die einfachsten Verhältnisse zweier Punkte zu einander dar. Sie werden alle beide durch die gerade Linie gegeben. Warum die Gerade diese doppelte Funktion hat, wissen wir nicht. Wir können aber nicht sagen, dass die eine fundamentaler ist als die andere. Die projektive Geometrie geht der metrischen wirklich voran, aber nicht weil ihre Begriffe fundamentaler sind, sondern nur weil die approximative Ermittelung der Massverhältnisse der exakten vorangeht. Nur in diesem Sinne, denke ich, kann von einer logischen Priorität der projektiven Geometrie die Rede sein.

Wir müssen also nicht nur schliessen, dass die projektiven Koordinaten den Begriff der Entfernung im unbestimmten Sinn doch voraussetzten, sondern auch folgendes bemerken: Um von der projektiven zur metrischen Geometrie überzugehen, müssen wir wissen, welche von allen der unendlichen Anzahl denkbarer Funktionen der Koordinaten die Entfernung im euklidischen Sinn gibt. Dazu müssen wir vorher wissen, was mit dieser Entfernung gemeint ist. Der Einwand wird also nicht umgangen, dass die euklidische Entfernung allen anderen Arten zu Grunde liegt, dass diese nur unterscheidbar und erfassbar sind durch ihre Abweichung von dem schon vorausgesetzten Begriff der euklidischen Entfernung. Dieser Einwand entspricht vollständig dem, der gegen das Krümmungsmass angeführt worden ist, nämlich, dass die Krümmung nur durch die Geradheit aufzufassen und zu verstehen ist, dass der gekrümmte Raum daher den ebenen voraussetzt.[1] Wenn die Projektivisten

---

1) Philosophen, die dies behauptet haben, sind folgende:
Riehl, „Der philosophische Kritizismus", II, S. 116, 1879.
Heymans, „Zur Raumfrage", II, S. 433, 1888.

also nach Klein die Schwierigkeiten, welche der richtigen Auffassung des Krümmungsmasses anhaften, glücklich vermieden haben, so sind sie doch in andere ebenso grosse geraten, und sie haben doch nicht den Einwand widerlegt, welcher seitens vieler Philosophen erhoben worden ist, dass die euklidische Geometrie die Grundlage und den Ausgangspunkt aller abweichenden Systeme bildet.[1])

Das Verhältnis zwischen der metrischen und der projektivistischen Auffassung der nichteuklidischen Geometrie ist einfach dies. Die Massverhältnisse der nichteuklidischen Geometrie sind nicht ausführbar in dem euklidischen Raum unter Benutzung gewöhnlicher Geraden, denen sowohl die Eigenschaft unveränderlicher Richtung, als auch die kürzeste Entfernung zwischen zwei Puukten zu sein, zukommt. Bei der metrischen Auffassung der nichteuklidischen Geometrie wird der Begriff der Richtung als ein wesentliches Merkmal der geraden Linie aufgegeben. Indem man den Gebilden eine gewisse Krümmung beilegt, können die metrischen Beziehungen der nichteuklidischen Geometrie zur Ausführung kommen. Ein solches gekrümmtes Gebilde ist aber natürlich nur, wie Land bemerkt, „by courtesy“ als Raum zu bezeichnen.[2])

Delboeuf, „L'ancienne et les nouvelles géométries“ I, S. 455, 1893.
J. Schultz, „Psychologie der Axiome“, S. 177, 1899.
Kirschmann, „Dimensionen des Raumes“, S. 354, 1902.

1) Die Philosophen, die diese Behauptung aufgestellt haben, sind hauptsächlich folgende:

Krause, „Kant und Helmholtz“, S. 53, 1878.
Riehl, „Der philosophische Kritizismus“, II, S. 179, 1879.
Jacobson, „Untersuchung zur Metageometrie“, S. 138, 1883.
E. Laas, „Idealism und Positivism“, III, S. 589, 1884.
Heymans, „Zur Raumfrage“, II, S. 443, 1888.
Pietzker, „Gestaltung des Raumes“, S. 68, 104, 1891.
Delboeuf, „L'ancienne et les nouvelles géométries“, III, S. 113, 1894.
Kirschmann, „Die Dimensionen des Raumes“, S. 351, 1902.

2) Land, „Kant's Space . . . Mind“, Vol. II, S. 42, 1877.

Lotze nannte solche Gebilde „Räumoide“, Metaphysik, S. 241, Bd. II, 1879. Vgl. Kirschmann, a. a. O., S. 361.

Bei der projektiven Auffassung dagegen wird der Begriff der Richtung beibehalten, der der Entfernung aufgegeben. Die Massverhältnisse der nichteuklidischen Geometrie kommen hier zum Ausdruck, nur indem man den Raum an gewissen Stellen als verdichtet oder verdünnt im Vergleich mit dem Euklidischen denkt. Aber solche Verdichtungen und Verdünnungen können nur einem Medium oder einem Punktsystem in dem Raum zukommen, nicht dem Raum selbst, im Vergleich mit dessen Gleichförmigkeit solche Verdichtungen und Verdünnungen erst erfassbar sind. Die projektive Geometrie bezieht sich in der Tat auf ein von dem Mathematiker selbst konstruiertes Punktsystem, und ein solches System setzt, wie viele Philosophen hervorgehoben haben,[1]) immer den gleichförmigen Raum voraus. Der Mathematiker kann ebensowenig den Raum konstruieren, den er hinterher benutzen will, wie ein Mann den Boden, auf dem er sein Haus bauen will.

Die Projektivisten haben sich also dem Einwand, dass ihre Geometrie sich auf etwas in dem gegebenen Raum bezieht, anstatt auf einen anderen selbständigen Raum ebensowenig entzogen, wie die Vertreter der metrischen Auffassung. Ich kann daher nicht einsehen, dass die projektive Geometrie in dieser Hinsicht vor der metrischen einen Vorzug habe. Dieselben Schwierigkeiten, welche mit der Verneinung der Richtung unter Beibehaltung der Entfernung verbunden waren, tauchen wieder auf bei der Verneinung der Entfernung unter Beibehaltung der Richtung und führen zu denselben Resultaten. Beide Geometrien beziehen sich auf eigenartige Gebilde in dem Raum, wodurch die nicht-

---

1) Wie zum Beispiel:
A. Krause, „Kant und Helmholtz“, S. 60, 1878.
Sigwart, „Logik“, Bd. II, S. 54, 61, 1878.
Riehl, a. a. O., S. 157, 1879.
Lotze, „Metaphysik“, Bd. II, S. 243, 1879.
E. Laas, a. a. O., S. 587, 1884.
Kirschmann, a. a. O., S. 399, 1902.
Reinecke, Dissertation, Halle, S. 48, 1903

euklidischen Verhältnisse verwirklicht werden können. Mathematisch kann vielleicht die projektive Methode vorteilhafter sein als die metrische, aber keine von beiden wirft das geringste Licht auf die Möglichkeit anderer Räume, als der unsrigen. Dies bleibt nach wie vor eine reine Annahme, die ganz willkürlich den mathematischen Arbeiten hinzugefügt wird.

§ 17. Die Grundlagen der Geometrie.

Die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie ist immer mit dem Versuch verknüpft gewesen, neue und festere Grundlagen für die Geometrie zu schaffen, und niemals mehr als jetzt. Während in den früheren Zeiten jedoch der Versuch gewöhnlich darauf hinauskam, die Anzahl der Axiome zu beschränken, ist heute die Tendenz, ihre Zahl zu vermehren. Besonders hat die projektive Geometrie gezeigt, was für eine grosse Zahl von Verhältnissen der Lage in der gewöhnlichen Geometrie der unmittelbaren Anschauung überlassen werden. Der erste Versuch, auch diese auf Axiome zurückzuführen, scheint von Moritz Pasch gemacht zu sein, „Vorlesungen über neuere Geometrie". Leipzig 1882. Ähnliche Versuche sind gemacht von Peano, „I prinzipii di geometria" 1889, von Guiseppe Veronese, „I fondamenti di geometria". Padua 1891. Diese Versuche gipfelten in Hilberts vielbewundertem Werk „Grundlagen der Geometrie". Leipzig 1899. Zweite Auflage 1903. Hier zerfallen die Axiome in fünf Gruppen, die im ganzen 21 Axiome enthalten.[1])

Da diese Axiome viele Dinge ausdrücken, die früher der Anschauung überlassen waren, so ist es ersichtlich, dass ihre allgemeine Tendenz ist, die Anschauung aus der Geometrie auszuschliessen, oder wenigstens ihr nur einen

---

1) G. B. Halsted in Amerika hat ein elementares Lehrbuch der Geometrie geschrieben, gestützt auf Hilberts Grundlagen, das er „Rational Geometry" nennt.

Platz am Anfang einzuräumen. Sind diese Axiome gegeben, so folgt die übrige Geometrie, nimmt man an, durch rein logische Deduktion, ohne dass eine weitere Hilfe der Anschauung erforderlich wäre. So beschreibt Poincaré scherzend Hilberts System: „Ainsi c'est bien entendu, pour démontrer un théorème, il n'est pas nécessaire ni même utile de savoir ce qu'il veut dire. On pourrait remplacer le géomètre par le piano à raisonner imaginé par Stanley Jevons; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses. Pas plus que ces machines, le mathématicien n'a besoin de comprendre ce qu'il fait.“ [1])

Dieser Versuch, den Gebrauch der Anschauung in der Geometrie möglichst einzuschränken, lässt die Geometrie einen entschieden formalistischen Charakter annehmen und bringt sie in nähere Beziehungen zu der Analysis. Sie erscheint wie ein besonderer Zweig der letzteren. Zugleich wird die Aufmerksamkeit auf die Beziehungen der Mathematik zur Logik gerichtet. Dies hat kürzlich viele Diskussionen hervorgerufen, besonders in Frankreich.[2]) Ist die Mathematik ein Zweig der Logik, oder ist die Logik ein Zweig der Mathematik, oder sind beide verschiedene Zweige einer allgemeinen Deduktionswissenschaft? Boole, Jevons, Schröder haben sich bemüht, die Logik zu einem Zweig der Mathematik zu machen, sie zu mathe-

---

1) Poincaré, „Les mathématiques et la logique“. Revue de Metaphysique et de Morale. Bd. XIII, No. 6, 1905. S. 816.

2) Die oben zitierte Nummer der Revue de Met. et de Morale gibt ein Verzeichnis der Artikel über diesen Gegenstand, die in dieser Zeitschrift seit 1893 erschienen sind. Das Verzeichnis umfasst über fünfzig Artikel.

matisieren,[1]) während Couturat, Russell, Whitehead versucht haben, die Mathematik zu einem Zweig einer verallgemeinerten und erweiterten Logik zu machen.[2]) Andererseits haben Peano und Burali-Forti in Italien beide Disciplinen nur als Zweige einer allgemeinen Deduktionswissenschaft oder eines symbolistischen Verfahrens angesehen und haben eine Zeichensprache erfunden, die „Pasigraphie", in der die Ausführung von Deduktionen jeglicher Art möglich sein soll, ohne den Gebrauch von Anschauungen oder Wörtern[3]) ganz in derselben Weise, wie es Leibniz einmal versuchte.[4]) Auf diese logischen Untersuchungen wollen wir hier nicht näher eingehen.

Dagegen betrachten viele neuere Mathematiker den Versuch, die Anschauung gänzlich von der Geometrie auszuschliessen, mit Misstrauen. Hölder sagt, dass er nur

---

1) George Boole, „An Investigation into the Laws of Thought...". Cambridge 1854. Dies, sein Hauptwerk schliesst das Material zweier früheren Werke aus den Jahren 1847 und 1848 ein.

Stanley Jevons, „The Principles of Science", 2. Vols, 1874, 2. ed, 1. Vol, 1877.

Ernst Schröder, „Der Operationskreis des Logikkalküls". Leipzig 1877 und andere Werke desselben Autors.

2) L. Couturat, „Les principes des mathematiques". Fünf Artikel Revue de Met. et de Morale, No. 1, 2, 4, 5, 1904 und No. 1 1905. Diese enthalten eine Zusammenfassung seiner vielen früheren Artikel sowohl wie einer Diskussion über die Ansichten anderer Autoren.

B. Russell, „The Principles of Mathematics", 1903.

A. N. Whitehead, „Treatise on Universal Algebra", 1898.

Herrmann Grassmann wird auch manchmal zu diesen gerechnet wegen seines Lehrbuchs der Arithmetik, 1861.

3) Guiseppe Peano, „I principii di geometria", Turin 1889. Deutsche Übersetzung von Schepp, Die Grundzüge des geometrischen Kalküls, 1891. Auch viele spätere Aufsätze. Die oben gemachte Klassifikation der Logiker in ihren Verhältnissen soll nicht als eine strenge angesehen werden.

4) Siehe Briefwechsel von Leibniz mit Mathematikern. Herausgeg. von Gerhardt. Bd. I, S. 570, 1899. Vgl. O. Hölder, Anschauungen und Denken, S. 14.

für „ganz begrenzte Gebiete“ möglich sei.[1]) Klein sagt auch in dieser Beziehung:[2]) „Ich halte es demnach auch nicht für richtig, dass, wenn wir einmal die Axiome aufgestellt haben, wir dann die Anschauung bei unseren Untersuchungen hintenansetzen; beim wirklichen geometrischen Denken vielmehr begleitet uns die Raumanschauung bei jedem Schritte.“ Er findet, dass die komplizierten Verhältnisse, die in der projektiven Geometrie behandelt werden, unmöglich ohne Hilfe der Anschauung behandelt werden könnten.

Ähnlich sagt Halstedt in seiner „Rational Geometry“ S. 67: „The aid from figures, from sensuous intuition, is so inexpressibly precious, that any attempt even to minimise it would be a mistake. That treatment of a proposition is best which connects it most closely with a visualisation of the figure. . . .“

Schon Gauss hat diese Unzulänglichkeit der reinen Logik nachdrücklich betont. In einer Rezension sagt er, indem er des Autors Gebrauch des Principium identitatis und des Principium contradictionis tadelt: „Dass von diesem logischen Hilfsmittel zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht leugnen wollen; aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist.“ [3])

Diese Autoren habe ich besonders angeführt, weil sie alle Metamathematiker sind, die, während sie so auf der Notwendigkeit der Anschauung als Hilfsmittel bestehen,

---

1) Anschauung und Denken in der Geometrie, S. 14.

2) Vorlesungen über die nichteuklidische Geometrie I, S. 355. Vgl. auch „Die Anwendung der Differentialrechnung auf die Geometrie“, S. 19–20.

3) Siehe Stäckel und Engel, S. 221. Vgl. Erdmann, S. 27.

sie ebenso nachdrücklich als Quelle genauer Kenntnis im Kantischen Sinne verdammen. Natürlich die Mathematiker, die die Metageometrie bekämpfen, wie Schotten, Pietzker, Zindler,[1]) u. a. bestehen auf der Anschauung als der einzigen wahren Quelle unserer geometrischen Kenntnis, wie auch die meisten der Philosophen es tun.[2])

In der Tat, wie sehr es den Mathematikern auch gelungen ist, die Hilfe der Anschauung auf ein Minimum zu beschränken, so muss doch zugegeben werden, dass sie ihre gänzliche Beseitigung nicht erreicht haben und vermutlich auch nicht erreichen werden. Die Hilbertschen Grundlagen haben hierin wohl den grössten Erfolg gehabt. Doch obwohl in diesem Werk die Anschauung an den Anfang verwiesen sein mag, behauptet sie hier noch einen höchst wichtigen Platz. Die Axiome, die Hilbert gibt, die bei

---

1) H. Schotten, „Die Grenze zwischen Philosophie und Mathematik", Unterrichtsblätter f. Mathematik und Naturwissenschaft, S. 54—55, 1896. Fr. Pietzker, „Die Gestaltung des Raumes", S. 73, 1891. Konrad Zindler, „Beiträge zur Theorie der mathematischen Erkenntnis". Sitzungsber. der Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien. Bd. CXVIII, S. 40—42, S. 44, 1889. Zindler behauptet sogar (in Übereinstimmung mit Lockes Theorie), dass jede neue Demonstration in der Geometrie einen neuen Akt der Anschauung erfordert, die wesentlich mit der Annahme eines neuen Axioms identisch ist. Daher ist nach ihm die Zahl der möglichen Axiome unendlich, und es ist deshalb unmöglich, unsere ganze mögliche Anschauung auf bestimmte Axiome zurückzuführen. Ebenfalls hat Delboeuf, „L'ancienne et les nouvelles géométries", étude IV, Revue phil. 39, S. 351, 1895, behauptet, dass die Zahl der Axiome unbestimmt sei, und dass die Fortschritte der Mathematik es vielleicht notwendig machen würden, dass man eine grössere Zahl als die gegenwärtige annehme. Diese Aussagen sind interessant, da sie vor der Veröffentlichung von Hilbert's Grundlagen mit ihren 21 Axiomen herauskamen.

2) Die Liste der Philosophen, die an der Anschauung als der wahren und einzig möglichen Quelle geometrischer Kenntnis festgehalten haben, würde zu lang sein, um hier aufgeführt zu werden. Unter den bedeutendsten seien erwähnt: Weissenborn, Becker, Land, Lotze, Riehl, Wundt, Kroman.

ihm zugleich als Definition der Grundbegriffe dienen, müssen entweder auf seine Autorität hin angenommen oder durch eigene Anschauung geprüft werden. Die Axiome der Anordnung z. B., sagt Hilbert, definieren den Begriff zwischen".[1]) Das aber tun sie eben nicht, sondern sie setzen diesen Begriff voraus. Wenn man nicht vorher wüsste, was unter diesem Begriff zu verstehen ist, würde man es niemals durch diese Axiome lernen. Denn diese Axiome sprechen aus, was lediglich die Folgen des Zwischenseins sind. Man muss diese Folgen also entweder einfach auf Autorität hin annehmen, wobei nur vorausgesetzt wird, Hilbert habe die nötigen Anschauungen gemacht, oder sie auf Grund des für ihn schon vorhandenen Begriffs des Zwischenseins prüfen. In seiner „Rational-Geometrie", die sich auf diese Grundlagen gründet, gebraucht Halsted statt des Wortes „define" an dieser Stelle den Ausdruck „make precise", da er sich scheinbar darüber klar war, dass von einer Definition im eigentlichen Sinne hier nicht die Rede sein könne.[2]) Die geometrische Anschauung wird also weder bei Hilbert noch bei irgend welchem anderen ähnlichen System völlig weggeschafft.

Obwohl, wie wir gesehen haben, einige der Metageometer der Anschauung eine untergeordnete Rolle als blosses Hülfmittel bei der Erlangung geometrischer Kenntnis einräumen, so leugnen sie andrerseits gewöhnlich nachdrücklich, dass sie in irgend welcher Weise zu unserer geometrischen Erkenntnis willkürlich beitragen kann. Poincaré, der, in der oben zitierten Abhandlung, die ultra-formalistische Tendenz in der reinen Analysis bekämpft und in der Arithmetik auf der Anschauung besteht, lässt sie in der Geometrie entschieden fallen. Er sagt, nur indem wir dies getan, und unser Vertrauen allein auf die Logik gesetzt haben, ist endlich, absolute Strenge heutzutage in der Mathematik erreicht worden. Anschauung mag uns als Hilfsmittel

---

1) Grundlagen der Geometrie, S. 4.

2) Rational Geometry, S. 5.

dazu dienen, durch Analogie, Induktion[1]) oder Erfahrung neue Wahrheiten zu vermuten, die Logik allein gibt uns die Gewissheit darüber. So schliesst Poincaré:[2]) „La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration: l'intuition est l'instrument de l'invention.“ Dies führt zu einer ungebührlichen Bewunderung für die, die ohne Anschauung auskommen können, und zu einer Art Verachtung für die, die sich auf sie zu verlassen scheinen. So sagt Poincaré an einer späteren Stelle:[3]) „En rejetant le secours de l'imagination, qui, nous l'avons vu, n'est pas toujours infaillible ils peuvent avancer sans crainte de se tromper. Heureux donc ceux qui peuvent se passer de cet appui! Nous devons les admirer, mais combien ils sont rares!“ Dies erklärt daher die Verachtung, in der die Anhänger der alten euklidischen Geometrie bei den Metageometern stehen. Diese Leute sind niemals imstande gewesen, über ihre euklidischen Anschauungen hinauszukommen, in die sie vollständig eingeschlossen sind. Sie gehören zu den von Gauss erwähnten Böotern Sie haben diese Geometrie einfach auf Euklids Autorität hin angenommen, sie ist die geliebte Religion ihrer Kindheit, wie Russell sie nennt.[4]) Man muss sich wundern, dass die „zweitausendjährige Autorität“ Euklids noch so stark ist.

Es wäre allerdings wunderbar, wenn diese Geometrie allein auf diese Autorität hin angenommen würde. Aber das ist nicht der Fall. Wir nehmen das Datum von Cäsars Tod auf den Beweis kompetenter Historiker hin an. Wir nehmen die Geschwindigkeit des Lichts auf die Behauptung kompetenter Physiker hin an. Aber unsere Geometrie nehmen wir nicht, selbst nicht der gemeinste Mensch, auf diese Weise an. Sie würde nicht so lange fortgelebt haben und

1) Vgl. O. Hölder, „Anschauung und Denken in der Geometrie“, S. 15, 1900.

2) La valeur de la science, S. 29.

3) a. a. O., S. 33.

4) Foundations of Geometry, S. 97.

nicht noch heute so allgemein angenommen werden, wenn wir es täten. Weil jedermann diese Geometrie durch seine eigene Anschauung bestätigt findet, weil er sieht, er kann sich in jedem Augenblick von ihrer Wahrheit überzeugen, darum schenkt er ihr sein Vertrauen. Aber der Metageometer hat die Anschauung bei Seite geworfen. Warum? Hat er sie als unglaubwürdig erfunden? Nein, er hat sie überall und auf das genaueste bestätigt gefunden. Ist er dadurch, dass er sie bei Seite schob, der Wahrheit näher geführt? Im Gegenteil, die so entwickelten Systeme finden nicht die geringste Bestätigung in der Erfahrung. Was hat nun den Metageometer dazu geführt, die Anschauung hintanzusetzen? Hat er es vielleicht getan, weil ihm jemand gesagt hat, sie sei unglaubwürdig? Es möchte fast in vielen Fällen so scheinen. Aber wessen Autorität sollen wir in diesem Falle annehmen, Euklids oder Bolyais?

Der Metamathematiker hat noch einen anderen Grund, die Anschauung bei Seite zu setzen. Er identifiziert sie mit der Einbildungskraft oder dem Vorstellungsvermögen, was natürlich nicht als genau angesehen werden kann. Er spricht geringschätzig von der „Subordination de l'intelligence à l'imagination“.[1]) Ob diese Annahme richtig ist oder nicht, wird in dem II. Teil, Kapitel 2, erwogen werden. Indes führt diese Annahme viele zu den Lehren der sensualistischen Schule der Mathematik, wie sie von Hume und Mill vertreten werden. Diese Doktrin lehrt, dass Objekte, die den mathematischen Definitionen entsprechen, nirgends, weder in der Erfahrung noch im menschlichen Geist, zu finden sind, dass es daher die Geometrie nicht mit Punkten ohne Ausdehnung zu tun haben kann, oder mit Linien ohne Breite, da wir uns diese nicht vorstellen können. „Our idea of a point“, sagt Mill,[2]) „I apprehend to be simply our idea of the minimum visible, the smallest portion of surface which we can see,“ eine Idee, die er von Hume

1) Lechalas, Géométrie générale, S. 18.

2) System of Logic Chap. V.

erhielt.[1]) Es gibt auch heute eine Gruppe von Mathematikern, die ganz passend mathematische Atomisten genannt werden können, die ähnlich behaupten, dass Punkte Ausdehnung, Linien Dicke etc., haben müssen.[2]) Doch führt diese Identifikation der Anschauung mit der Imagination nicht notwendig zu der sensualistischen Ansicht, worauf Erdmann[3]) hingewiesen hat, und was später hier gezeigt werden wird, da die Objekte, mit denen es die Geometrie zu tun hat, abstrakte Begriffe sein könnten, von denen die Anschauungsbilder nur „Repräsentanten" wären.

Das Bestreben der modernen Mathematiker ist also im Allgemeinen formalistisch. Nur einige leugnen, dass es möglich sei, die Anschauung vollständig aus der Geometrie auszuschliessen, aber die Mehrzahl ist der Meinung, dass die Anschauung nicht eine wirkliche Quelle für geometrische Erkenntnisse bedeute, sondern dass sie nur ein sekundäres Hülfsmittel darbiete, das möglichst wenig angewandt werden soll.

---

1) Treatise on Human Nature, Part. II, Sec. 1.

2) Ein solcher ist J. F. Bonnel, „La Géométrie atomistique rationelle", Paris 1902. Siehe aus Enseignement mathématique 4, 1902. 1. Nach Russell muss der Punkt materiell sein, um von anderen Punkten unterscheidbar zu sein, kann aber nicht ausgedehnt sein (Foundations of Geometry, S. 189—192). Noch eine andere Ansicht wird von Kurt Geissler geäussert, der einen neuen Begriff, die „Weitenbehaftungen", erfunden hat, die den mathematischen Punkten zukommen sollen. Diese sollen den Punkten die Wirksamkeit einer Ausdehnung verleihen, ohne eine solche wirklich zu sein. Wie das geschieht, ist nicht ganz klar. Jedenfalls glaubt Geissler, durch diesen neuen Begriff die Schwierigkeiten, die der atomistischen Theorie gewöhnlich anhaften, zu vermeiden. (Siehe seine Grundsätze und Wesen des Unendlichen in der Mathematik. Leipzig 1902. „Die geometrischen Grundvorstellungen", Jahresber. d. deutsch. math. Vereins. XII, 5, und seine „Grundgedanken zu einer übereuklidischen Geometrie" ebenda XIII, 5, und „Ist die Annahme vom Absoluten in der Anschauung und im Denken möglich?" Arch. f. syst. Phil., 1903, 4.)

3) Die Axiome der Geometrie, S. 158.

§ 18. Die neueren Ansichten über die Axiome.

In ähnlicher Weise gehen die Ansichten der neueren Mathematiker über das Wesen der geometrischen Axiome, besonders über den Grad, bis zu dem sie empirisch sind, auseinander. Wir haben gesehen, dass diese empirische Auffassung erst allmählich entstanden ist, dass Zweifel zuerst nur gegen das Parallelenaxiom erhoben wurden (Gauss, Lobatschefsky, Bolyai). Erst bei Riemann und Helmholtz finden wir die Theorie, dass alle Axiome empirisch sind. Nur die Axiome der Logik und der Grösse sind bei diesen beiden Autoren a priori und sicher. Es hat nicht an späteren Autoren gefehlt, die auch diese Axiome für empirisch haben erklären wollen.[1])

Andererseits haben, wie es scheint, Liebmann und Medicus[2]) nur die Axiome der Dimensionen und der Parallelen als empirisch angesehen, weil diese die „Charakteristik" sind, durch die unser Raum sich von anderen metageometrisch möglichen Räumen unterscheidet. Die andern Axiome, die allen Räumen gemeinsam sind, werden als a priori betrachtet.

Eine ähnliche Ansicht ist die von Russell,[3]) der die Axiome der projektiven Geometrie, da sie allen möglichen Formen des Raumes gemeinsam sind, als a priori ansieht, die der metrischen Geometrie dagegen, da sie die Eigenschaften sind, durch die ein Raum vom andern unterschieden wird, für empirisch hält.

---

1) Erdmann z. B. hält Arithmetik sowohl wie Algebra, also die ganze reine Analysis für empirisch. Siehe „Axiome der Geometrie", S. 165, 167.

2) O. Liebmann, „Raumcharakteristik und Raumdeduktion". Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil., Bd. I, S. 201 ff., 1877. Wiedergedruckt in seiner „Analysis der Wirklichkeit", 2. Aufl. 1880, 3. Aufl. 1900. Fr. Medicus, „Kants transscendentale Ästhetik und die nichteuklidische Geometrie". Diss. Jena 1898.

3) The Foundations of Geometry. Cambridge 1897.

Andererseits zeigen Klein und Poincaré eine Abweichung von den empirischen Ansichten, indem sie geneigt sind, das apriorische Element in den geometrischen Axiomen etwas mehr zu würdigen.

So sieht sie Klein als Postulate an, angedeutet, aber nicht völlig durch die Erfahrung gegeben. Er sagt:[1] „Man liest gewöhnlich: „Das Axiom drückt eine Tatsache aus, die uns in unserer Anschauung unmittelbar deutlich ist, die also keines Beweises mehr fähig ist . . . .“ Ich würde stattdessen sagen: „Ein Axiom drückt eine Forderung aus, dass das, was uns ungenau in der Auffassung vorschwebt, genau richtig sein soll.““ Weiter (a. a. O., S. 356) sagt er: „Ich schreibe den Axiomen die Bedeutung zu, dass sie **Forderungen** vorstellen, vermöge deren wir uns über die Ungenauigkeit der Anschauung oder über die Begrenztheit der Genauigkeit der Anschauung zu unbegrenzter Genauigkeit erheben.“ Und ferner (a.a.O., S. 357) sagt er: „Wenn wir aber in den Axiomen begriffliche Feststellungen sehen, die über die natürliche Anschauung hinausgreifen, so können dieselben nicht der Erfahrung entnommen sein. . . . . Wir werden daher sagen: „Bei dieser Auffassung von der Bedeutung der Axiome sind die allgemeinen Bedingungen der Anschauung selbstverständlich durch die Erfahrung zu kontrollieren, bezw. zu entwickeln, durch möglichst genaue Messungen. Dass wir aber das so gewonnene Material auf absolut genaue Axiome beziehen, das stammt nicht aus der Erfahrung, sondern entstammt einem Bedürfnis unserer eigenen Natur.“ „Das Gleiche gilt für alle Naturgesetze, die wir mathematisch aussprechen.“ Daher ist er der Meinung, dass in der reinen Mathematik die empirische Ansicht durchaus nicht ausreicht,

1) Vorlesungen über Nichteuklidische Geometrie, I, 1893, S. 317.

so notwendig sie auch in der angewandten Mathematik sein mag, dass wir es in der reinen Mathematik nicht so sehr mit Anschauungen als mit abstrakten Begriffen zu tun haben (siehe a. a. O., S. 312).

Ähnlich ist Poincaré, da er sieht, dass blosse Erfahrung die in den Axiomen geforderte absolute Genauigkeit nicht geben könnte, und da er nicht imstande ist, eine andere Quelle für diese Genauigkeit zu entdecken, zu dem Schluss gekommen, dass die Axiome blosse, auf Übereinkommen beruhende Festsetzungen sind, zu denen wir nur durch Bequemlichkeit und Einfachheit geführt werden. Er nennt sie daher: „conventions“ oder „définitions déguisées“.[1]) Zugleich glaubt er, dass sie niemals durch die Erfahrung begründet oder widerlegt werden können. Sie sind nur bequeme Formen, mit denen wir die Erfahrung auffassen, zu denen wir aber keineswegs a priori im Kantischen Sinne gezwungen sind. Wir sind völlig frei in unserer Wahl und nur durch Bequemlichkeit und Einfachheit geleitet. Daher sagt er, es sei sinnlos, zu fragen, welche Geometrie wahr sei. Wir könnten ebensogut fragen, ob das metrische System wahr und die alten Messungen falsch seien. Alles, was wir vernünftigerweise fragen können, ist: Welches System ist das Bequemste?

Es herrscht also heute unter den Mathematikern eine ziemlich grosse Meinungsverschiedenheit über die Natur der Axiome, besonders darüber, inwieweit und in welchem Sinn sie empirisch sind. Nur darüber sind sie einig, dass die Axiome in irgendwelcher Weise mehr oder weniger empirischer Natur sind.

---

1) La science et l'hypothèse, S. 66. Siehe Lindemanns Übersetzung, „Wissenschaft und Hypothese“. Leipzig 1904, S. 51.

§ 19. ie neueren Ansichten über den Raum.

Obgleich die nichteuklidische Geometrie als eine widerspruchslose Geometrie, die neben und unabhängig von der euklidischen Geometrie, aber ihr ebenbürtig, besteht, und als eine Geometrie, die die Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats und den empirischen Ursprung der mathematischen Begriffe und der meisten, wenn nicht aller geometrischen Axiome, beweist, heutzutage ziemlich allgemein von den Mathematikern angenommen wird,[1]) so herrscht doch eine allgemeine Neigung zu weit grösserer Vorsicht und Nüchternheit in Bezug auf die metaphysischen Konsequenzen, die daraus zu ziehen sind.[2]) Tait, Clifford und viele andere frühere Anhänger der neuen Theorien nahmen den ultraempirischen Standpunkt ein, wonach das Krümmungsmass des Raumes oder sogar die Anzahl seiner Dimensionen von Punkt zu Punkt oder auch mit der Zeit variieren könnte, so dass wir aus Erfahrungen in unserer unmittelbaren Nähe nicht schliessen können, welches die Krümmung oder die Zahl der Dimensionen in unerreichbar fernen oder unmessbar kleinen Räumen sein werden.[3]) Diese Auffassung wird heute nicht nur von den Philosophen, sondern auch von den meisten

---

1) Z. B. in Schlömilch's Handbuch der Math., Bd. II, 2. Aufl., 1904, S. 211, heisst es zu Anfang des Kapitels über Planimetrie: „Die Grundbegriffe der Mathematik, die aus der Erfahrung gegeben, vorausgesetzt werden . . .“ Und weiter dann: „Der mathematische Körper ist eine Abstraktion von den physikalischen Körpern der Erfahrung . . .“ Diese Ausdrucksweise zeigt, wie völlig das Prinzip des empirischen Ursprungs der mathematischen Begriffe die mathematischen Kreise durchdrungen hat.

2) Einige Ausnahmen davon sind Kleinpeter in Deutschland, Poincaré, Lechalas und Calinon in Frankreich, Halsted in Amerika. — Diese Männer ziehen noch weitreichende metaphysische und erkenntnistheoretische Folgerungen aus den neuen mathematischen Theorien.

3) Siehe Tait, Lectures on some recent advances in physical Science, S. 5, 1876.

Mathematikern abgelehnt.[1]) Ein Raum, dessen Krümmungsmass von Punkt zu Punkt in regelmässiger Weise variiert, ist nicht mathematischer Behandlung, sondern nur empirischer Beschreibung fähig. Selbst wenn das Krümmungsmass nach irgend einem bekannten Gesetz variiert, würde die Mathematik eines solchen Raumes so kompliziert sein, dass diese Tatsache allein genügt, die Tätigkeit der Mathematiker meistenteils auf die Fälle der konstanten Krümmung zu beschränken, die schon erheblich komplizierter sind, als die von Null-Krümmung. Man hat daher schon in früherer Zeit nach anderen Gründen für diese Einschränkung gesucht. So zeigen Helmholtz und Riemann, dass Körper unabhängig sind von der Lage nur bei der Annahme konstanter Krümmung, und da dies offenbar in unserem Raume der Fall ist, so ist der Fall konstanter Krümmung der einzige, dessen Betrachtung für uns wichtig ist.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass die Tatsache, dass Körper in unserm Raum ihre Gestalt bei Bewegung nicht ändern, empirisch nicht sicherer ist als die, dass die Winkelsumme eines Dreiecks zwei Rechten gleich ist. Die Konstanz des Krümmungsmasses ist daher ebenso schwer empirisch festzustellen, wie seine Existenz überhaupt, und seine Anwendung auf uns unerreichbare Räume ist empirisch nicht haltbar. Ferner um zu bemerken, dass Körper ihre Gestalt bei Bewegung nicht verändern, ist erforderlich, dass wir schon den Begriff geometrischer Starrheit besitzen. Wir können daher Helmholtz' Gründe für die universelle Konstanz des Krümmungsmasses nicht für zulänglich halten. Der Zirkel in diesem Beweise ist einleuchtend.

Es ist kürzlich jedoch versucht worden, die Unmöglichkeit der Existenz von Räumen mit variablem Krümmungsmass überhaupt a priori zu beweisen, und zwar von dem Mathematiker Russell, der selbst ein eifriger Verfechter

1) Calinon jedoch behauptet noch die Möglichkeit einer Variation des Krümmungsmasses mit der Zeit. Siehe sein „L'espace géométrique" Revue phil., Juni 1889, S. 594.

der Metageometrie ist. Er behauptet, dass eine solche Annahme, da sie die Existenz singulärer Punkte einschliessen würde, wie die Punkte des Maximums und Minimums des Krümmungsmasses, absolute Position, also eine Absurdität voraussetzt.[1]) Auch Stallo zeigt, dass bei der Annahme eines veriablen Krümmungsmasses kein Grund vorliegt, die inhärente Figur des Raumes auf eine gekrümmte zu beschränken. Er sagt:[2]) „There can be no valid reason founded upon or consistent with premisses of the transscendental theory, why space may not be essentially paraboloidal, or hyperboloidal, or polyhedral, or of any other inherent form evolvable from the creative fancy of the next non-homoloidal intellect." Das heisst, es ist kein Grund, warum das Krümmungsmass an gewissen Punkten oder gewissen Linien nicht unendlich sein könnte, und anderswo Null, eine Annahme, die durch unsere Prämissen keineswegs ausgeschlossen wird. Aber es wird ganz klar, dass das, womit wir es hier zu tun haben, vielmehr das Wesen einer Figur, als eines Raumes ist. Denn die Lage kann nur bestimmt werden mit Bezug auf eine Figur, die unterscheidbare Teile hat. Alle Lagen im Raum aber sind gleichartig und daher ist die Position in ihm relativ. Wir müssen also Russells Einwand als begründet ansehen. Zugleich muss darauf hingewiesen werden, dass er entschieden philosophischer Natur ist, wie es in der Tat von vielen Philosophen betont worden ist. Wenn also die Annahme eines variablen Krümmungsmasses aus philosophischen Gründen verworfen werden kann, so muss es erlaubt sein, die Annahme eines Krümmungsmasses überhaupt aus philosophischen Gründen zu verwerfen, wenn derartige triftige Gründe zu finden sind, ein Prinzip, das nicht alle Mathematiker zuzugeben geneigt sind. Es mag in diesem Zusammenhang auch bemerkt werden, dass eine bedeutende Meinungsverschiedenheit darüber herrscht, was eine philo-

---

1) The Foundations of Geometry, S. 69, Cambridge 1897.

2) Concepts of modern Physics, S. 230.

sophische Absurdität ist. Stallo findet die Vorstellung absurd, dass es Kurven geben sollte, die weder Tangenten noch Normale haben (a. a. O., S. 239), worin doch Klein und Poincaré eine der wichtigsten Entdeckungen der Mathematik sehen.[1]) Die ganze nichteuklidische Geometrie ist eine grosse Absurdität für den gewöhnlichen Menschen, aber ihre Anhänger behaupten, dass sie dies nur wegen seiner Vorurteile ist, gerade wie die Existenz der Antipoden für die absurd war, die von der Flachheit der Erde überzeugt waren. Daher kann die reductio ad absurdum schwerlich als eine genügende Widerlegung gelten, ehe wir uns darüber besser verständigt haben werden, was eine philosophische Absurdität eigentlich ist.

Wie die Ansichten über die Arten des möglichen Raumes auch auseinander gehen mögen, ziemlich allgemein ist heute zugegeben, dass die Zahl der logisch möglichen Geometrien unendlich ist.[2]) Nicht nur können verschiedene Geometrien durch die Annahme eines variablen Krümmungsmasses hervorgebracht werden, sondern irgend eines der geometrischen Axiome kann verneint und auf diese Verneinung kann eine neue Geometrie gebaut werden. Dies Prinzip ist in der Tat von Hilbert in seinen Grundlagen angewendet, und wird heute als die anerkannte Methode angesehen, um die Unabhängigkeit der Axiome von einander zu prüfen. Wir haben schon die Nicht-Archimedische und die Nicht-Legendresche Geometrie erwähnt, als beruhend auf der Leugnung der Axiome der Stetigkeit. Poincaré hat auch, das was er „La quatrième Géométrie" nennt, dadurch erfunden, dass er in Abrede stellt, dass eine Gerade um einen Punkt einer gegebenen Geraden rotieren kann, bis

1) Poincaré, „La valeur de la science", S. 17. Auch Picard in seinem historischen Versuch der Entwicklung der Analysis gebraucht folgenden Ausdruck: „Ce fut, pour l'époque, un résultat bien remarkable quand les travaux de Riemann et de Weierstrass montrèrent qu'il existe des fonctions continues n'ayant pas de dérivées". Siehe „La science modern et son état actuel", S. 52.

2) Vgl. Poincaré, la science et l'hypothèse, S. 63.

sie mit der Verlängerung der letzteren zusammenfällt.[1]) Durch Anwendung ähnlicher Methoden sind viele andere Geometrien aufgestellt worden.[2])

Obwohl daher die modernen Mathematiker also ziemlich einig sind über die Berechtigung aller der von Euklid abweichenden Geometrien, welche analytisch möglich sind, gehen doch ihre Meinungen über die Berechtigung der ihnen korrespondierenden Räume auseinander. Während einige alle solche Räume zulassen, leugnen andere die Möglichkeit einiger davon und zwar aus philosophischen Gründen ungeachtet, dass die entsprechenden Geometrien fertig da sind. Eine andere Klasse Mathematiker gibt es, die sich lediglich mit der Mathematik des Gegenstands beschäftigt, ohne besonders darauf einzugehen, ob es korrespondierende Räume gibt, oder ob überhaupt philosophische Konsequenzen daraus zu ziehen sind.

§ 20. Zusammenfassung.

Hiermit schliesst unsere historische Darstellung der metageometrischen Raumtheorien. Es dürfte angebracht sein, sie noch einmal kurz zusammenzufassen. Wir haben gesehen, dass diese Theorien dem Versuch entsprangen, das Parallelenpostulat zu beweisen. Nachdem viele Versuche gescheitert waren, schuf Saccheri eine neue Epoche durch seinen denkwürdigen Versuch eines indirekten Beweises: Nehmen wir das euklidische Postulat als falsch an und ziehen wir die Konsequenzen dieser Annahme. Wenn unter diesen eine ist, die einem der siebenundzwanzig von Euklid ohne Hilfe des elften Postulats aufgestellten Sätze widerspricht, wird das Postulat bewiesen sein. Hierin glaubt Saccheri selbst Erfolg gehabt zu haben, aber sein Verdikt ist von den neueren Mathematikern nicht angenommen.

1) La science et l'hypothèse, S. 61, 62.

2) Siehe Anmerkungen zu Lindemann's Übersetzung von Poincaré „Wissenschaft und Hypothese“, S. 276—277.

Lambert machte einen ganz ähnlichen Versuch mit ähnlichen Resultaten. Indem sie die axiomatische Natur dieses Postulats verwarfen, schlossen die Mathematiker aus seiner Unbeweisbarkeit, dass er empirischer Natur sein müsste. Gauss war der erste, der diese Überzeugung entschieden aussprach. Lobatschefsky und Bolyai kamen unabhängig zu derselben Anschauung und entwickelten die Geometrie des spitzen Winkels von Saccheri, nicht als eine falsche zu verwerfende Art der Geometrie, sondern als eine wahre und der euklidischen ebenbürtige Geometrie, eine, die denselben Anspruch machen könnte auf mögliche Realisierbarheit in der Erfahrung wie die euklidische. So entstanden die metageometrischen Raumtheorien. Lobatschefsky schrieb dem Raum auch eine gewisse „Raumkonstante“ zu, die nur durch die Erfahrung bestimmt werden könnte. Er betrachtete auch mathematische Begriffe im allgemeinen als empirisch.

Diese empirische Tendenz gipfelte in Riemann und Helmholtz. Ersterer sah nicht nur das Parallelenpostulat und alle andern Axiome als empirische „Hypothesen“ an, sondern auch die Zahl der Raumdimensionen. Unseren Raum betrachtete er nur als eine aus der Zahl der möglichen Arten, die alle unter den einen allgemeinen Begriff einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zusammengefasst werden könnten. Er zeigte, dass die unterscheidende Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeiten neben der Zahl ihrer Dimensionen, ihrem qualitativen Inhalt und der Diskretheit oder Stetigkeit, ihr Krümmungsmass sei, eine Grösse, die er selbst durch Verallgemeinerung des Gaussschen Krümmungsmasses für Flächen schuf. Zugleich erneuerte er die alte Saccherische Geometrie der Hypothesen des stumpfen Winkels als die Geometrie eines Raumes von konstantem, positivem Krümmungsmass. Diesen Raum stellte er neben den Euklids und den von Lobatschefsky und Bolyai, welche drei Räume ein konstantes Krümmungsmass haben.

sie mit der Verlängerung der letzteren zusammenfällt.[1]) Durch Anwendung ähnlicher Methoden sind viele andere Geometrien aufgestellt worden.[2])

Obwohl daher die modernen Mathematiker also ziemlich einig sind über die Berechtigung aller der von Euklid abweichenden Geometrien, welche analytisch möglich sind, gehen doch ihre Meinungen über die Berechtigung der ihnen korrespondierenden Räume auseinander. Während einige alle solche Räume zulassen, leugnen andere die Möglichkeit einiger davon und zwar aus philosophischen Gründen ungeachtet, dass die entsprechenden Geometrien fertig da sind. Eine andere Klasse Mathematiker gibt es, die sich lediglich mit der Mathematik des Gegenstands beschäftigt, ohne besonders darauf einzugehen, ob es korrespondierende Räume gibt, oder ob überhaupt philosophische Konsequenzen daraus zu ziehen sind.

§ 20. Zusammenfassung.

Hiermit schliesst unsere historische Darstellung der metageometrischen Raumtheorien. Es dürfte angebracht sein, sie noch einmal kurz zusammenzufassen. Wir haben gesehen, dass diese Theorien dem Versuch entsprangen, das Parallelenpostulat zu beweisen. Nachdem viele Versuche gescheitert waren, schuf Saccheri eine neue Epoche durch seinen denkwürdigen Versuch eines indirekten Beweises: Nehmen wir das euklidische Postulat als falsch an und ziehen wir die Konsequenzen dieser Annahme. Wenn unter diesen eine ist, die einem der siebenundzwanzig von Euklid ohne Hilfe des elften Postulats aufgestellten Sätze widerspricht, wird das Postulat bewiesen sein. Hierin glaubt Saccheri selbst Erfolg gehabt zu haben, aber sein Verdikt ist von den neueren Mathematikern nicht angenommen.

---

1) La science et l'hypothèse, S. 61, 62.

2) Siehe Anmerkungen zu Lindemann's Übersetzung von Poincaré „Wissenschaft und Hypothese", S. 276—277.

Lambert machte einen ganz ähnlichen Versuch mit ähnlichen Resultaten. Indem sie die axiomatische Natur dieses Postulats verwarfen, schlossen die Mathematiker aus seiner Unbeweisbarkeit, dass er empirischer Natur sein müsste. Gauss war der erste, der diese Überzeugung entschieden aussprach. Lobatschefsky und Bolyai kamen unabhängig zu derselben Anschauung und entwickelten die Geometrie des spitzen Winkels von Saccheri, nicht als eine falsche zu verwerfende Art der Geometrie, sondern als eine wahre und der euklidischen ebenbürtige Geometrie, eine, die denselben Anspruch machen könnte auf mögliche Realisierbarheit in der Erfahrung wie die euklidische. So entstanden die metageometrischen Raumtheorien. Lobatschefsky schrieb dem Raum auch eine gewisse „Raumkonstante" zu, die nur durch die Erfahrung bestimmt werden könnte. Er betrachtete auch mathematische Begriffe im allgemeinen als empirisch.

Diese empirische Tendenz gipfelte in Riemann und Helmholtz. Ersterer sah nicht nur das Parallelenpostulat und alle andern Axiome als empirische „Hypothesen" an, sondern auch die Zahl der Raumdimensionen. Unseren Raum betrachtete er nur als eine aus der Zahl der möglichen Arten, die alle unter den einen allgemeinen Begriff einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zusammengefasst werden könnten. Er zeigte, dass die unterscheidende Eigenschaft dieser Mannigfaltigkeiten neben der Zahl ihrer Dimensionen, ihrem qualitativen Inhalt und der Diskretheit oder Stetigkeit, ihr Krümmungsmass sei, eine Grösse, die er selbst durch Verallgemeinerung des Gaussschen Krümmungsmasses für Flächen schuf. Zugleich erneuerte er die alte Saccherische Geometrie der Hypothesen des stumpfen Winkels als die Geometrie eines Raumes von konstantem, positivem Krümmungsmass. Diesen Raum stellte er neben den Euklids und den von Lobatschefsky und Bolyai, welche drei Räume ein konstantes Krümmungsmass haben.

über ihre Bedeutung für die geometrischen Axiome. Das Eine jedoch, worin die neueren Mathematiker einstimmig scheinen, ist die Ansicht, dass die mathematischen Begriffe und die meisten, wenn nicht alle geometrischen Axiome, wenigstens teilweise empirisch sind, und dass Kants apriorische Theorie von der Anschauung falsch ist; — und sonderbar, dieser Schluss — die obige Darstellung hat es uns gezeigt — ist nicht ein Resultat, sondern eine Voraussetzung der ebenbeschriebenen Theorien.

Wir werden nun im zweiten Teil den Ursprung und die Rechtfertigung des empirischen Standpunktes untersuchen, auf den sich die Metageometrie gründet.

II. Teil.

Philosophische Prüfung des Ursprungs und der Berechtigung des mathematischen Empirismus.

1. Abschnitt.

Die Verfechter des mathematischen Empirismus: Helmholtz, Erdmann, Russell.

§ 1. Bedürfnis und Aufgabe einer philosophischen Prüfung.

Es ist jetzt unsere Aufgabe, den Ursprung und die Berechtigung des empirischen Standpunktes zu untersuchen, der, wie uns die eben gegebene geschichtliche Darstellung gezeigt hat, die wahre Grundlage ist, auf die die metamathematischen Raumtheorien aufgebaut sind. Die Metamathematiker sind im Ganzen der Meinung, dass die mögliche Existenz anderer Räume und die empirische Natur der Axiome durch die nichteuklidische Geometrie bewiesen worden ist. Daher sind sie geneigt, die Einmischung der Philosophen in dies Gebiet übel zu vermerken, da sie es als jenseits des Gesichtskreises philosophischer Untersuchung gelegen betrachten.[1]) Was kann reine Spekulation nützen gegen

1) Viele Metamathematiker sehen sogar die Kantische Erkenntnistheorie als durch die Metageometrie widerlegt an. So sagt Kleinpeter, „Entwicklung des Raum- und Zeitbegriffs in der neueren Mathematik und Mechanik". Arch. für syst. Phil. IV, S. 38, wo er von Kant und den neuen Theorien spricht: „Dadurch wurde die Unmöglichkeit der (Kantischen) Anschauung dargetan", als wäre es eine vollständig ab-

das, was mathematisch bewiesen ist? fragen sie. Wenn die neuen Theorien wirklich mathematisch bewiesen wären, dann würde natürlich diese Frage völlig berechtigt sein. Was mathematisch bewiesen ist, kann nicht aus irgend welchen anderen Gründen in Zweifel gezogen werden. Doch ich denke, die voraufgehenden historischen Darstellung haben hinreichend klar gezeigt, dass dies nicht der Fall ist. Wir sahen, dass bei Gauss, Lobatschefsky und Bolyai aus der Unbeweisbarkeit des Parallelenpostulats der Schluss, dass letzteres empirischen Ursprungs sein müsse, nur gezogen werden könne auf Grund eines schon angenommenen empirischen Standpunktes, da sonst keine genügenden Gründe vorlägen, die axiomatische Natur dieses Postulats auszuschliessen. Dies, sahen wir, wurde von Erdmann dem grossen Verfechter der Metageometrie von philosophischer Seite aus selbst zugegeben.[1]) Riemanns Empirismus, wie wir auch aus Erdmanns Zeugnis wissen, hatte seinen Ursprung in Herbarts Psychologie und kam in seinen mathematischen Ansichten blos zum Ausdruck. Helmholtz' Empirismus entsprang, wie wir aus seiner eigenen Angabe wissen, seinen physiologischen Untersuchungen. Er geht seiner Anwendung desselben auf die Mathematik wenigstens um dreizehn Jahre vorher. Daher dürfte historisch, wie logisch zur Genüge gezeigt sein, dass die nichteuklidische Geometrie selbst nur den Untersatz des Beweises bildet, dessen (mehr oder weniger) unterdrückter Obersatz der empirische erkenntnistheoretische Standpunkt ist. Die Berechtigung dieses Standpunktes kann daher nur nach philosophischen Gründen entschieden werden, und falls eine solche Berechtigung nicht zu finden ist, kann man nicht behaupten, dass diese Theorien

gemachte Sache. Die Falschheit dieser Behauptung ist klar, wenn man erwägt, dass der empirische Standpunkt, auf den sich die Metageometrie gründet, selbst eine Ableugnung des Kantischen ist. Daher kann die Metageometrie Kant unmöglich widerlegen, da sie bereits auf eine Ableugnung seiner Lehre gegründet ist.

1) Axiome der Geometrie, S. 107. Siehe auch oben S. 37.

eine zureichende Begründung haben. Die Philosophen haben daher nicht nur ein Recht, sondern auch die Pflicht, dies Gebiet zu betreten. Denn die betreffenden Fragen sind nicht nur für die Mathematik von Wichtigkeit, sondern auch für die ganze Erkenntnistheorie. Diese Theorien bedürfen daher einer philosophischen Erörterung.

Solche philosophische Erörterung kann aber den Wert der nichteuklidischen Geometrien als solcher nicht im mindesten berühren. Die Möglichkeit dieser ist mathematisch bewiesen, und keine philosophische Erörterung kann sie widerlegen. Die philosophische Erörterung bezieht sich nur auf die Raumtheorien, die im Zusammenhang mit diesen Geometrien entstanden sind, die aber, wie wir gesehen haben, keine direkte und notwendige Folge von ihnen sind. Die philosophische Erörterung betrifft nur die Bedeutung dieser Geometrien für unsere Erfahrung und untersucht, ob die Geometrien eine solche haben oder nicht. Aber selbst wenn ihnen eine Bedeutung für die Erfahrung abgesprochen wird, selbst wenn all diese wunderbaren Theorien über andere Räume oder andere Formen der Anschauung als die unsrigen in die Klasse der geistreichen Spekulationen verwiesen werden, so wird die Möglichkeit der Geometrien selbst als blosser Gedankensysteme, als der notwendigen und folgerichtigen Konsequenzen gewisser Voraussetzungen, welche auch mathematisch sehr wertvoll sein mögen, nicht im mindesten in Abrede gestellt.[1]) Mit Recht sind sie als

---

1) So sollen Poincaré und Klein die Lobatschefskysche Geometrie auf die Integration gewisser linearer Differentialgleichungen angewandt haben (siehe „La Science et hypothèse", S. 58). Diese neuen Geometrien ermöglichen auch eine konkretere Form für gewisse Systeme von Verhältnissen, die in unserem Raum nicht dargestellt werden können, entweder, weil die Massverhältnisse verschieden sind, oder weil die Zahl der erforderlichen Dimensionen drei überschreitet. Doch schon imstande zu sein, diese durch ein rein hypothetisches und unvorstellbares geometrisches Gebilde darzustellen, ist ein Vorteil wegen der Übersichtlichkeit und Konkretheit, die dadurch erreicht wird. Solch ein Gebilde besteht auch, obwohl nicht als ein Ganzes vorstellbar, gänzlich aus vorstellbaren Teilen,

vorzüglicher Beweis mathematischen Talentes und Scharfsinns angesehen. „Ideell können wir allerlei Arten von Geometrien konstruieren .... ohne dass die ideelle Vollkommenheit dieser Geometrien ihnen objektive Gültigkeit verleiht und sie davor schützen kann, Hirngespinste zu bleiben,“[1]) sagt Riehl. Ob sie solche Hirngespinste sind oder eine wirkliche Bedeutung für die Erfahrung haben, kann nicht aus den mathematischen Formeln selbst abgeleitet werden. Das kann nur die Philosophie entscheiden.

Zu der philosophischen Kritik werden wir uns daher jetzt wenden, indem wir erst die Argumente prüfen, die zur Verteidigung des mathematischen Empirismus angeführt worden sind. Es muss gesagt werden, dass die Mathematiker, indem sie glaubten, ihr empirischer Standpunkt sei durch ihre Mathematik bewiesen, äusserst wenig zu seiner Verteidigung beigebracht haben. Sie haben gewöhnlich zu seiner Erklärung und Darlegung es für genügend erachtet, auf die Mathematik hinzuweisen, aus der er folgen sollte. Erst bei Helmholtz finden wir unter dem Druck der philosophischen Kritik einen Versuch, den mathematischen Empirismus von philosophischer Seite aus zu verteidigen. Das Wenige, was sonst noch an Verteidigung dieser Art vorhanden ist, ist von den wenigen Philosophen gekommen, die sich für die Metageometrie erklärt haben, unter denen

---

Linien, Ebenen, Körpern. Es ist nur ihr Zusammenhang, der in unserem Raume nicht ausführbar ist. Dieser steht aber in bestimmten und leicht fasslichen Verhältnissen, zu solchen, die in unserem Raume ausführbar sind. Diese Gebilde gewinnen daher eine Art symbolische Vorstellbarkeit, ähnlich wie wir eine Auffassung von Dingen erlangen, die entweder zu gross oder zu klein sind, oder sonst über unsere Vorstellungsfähigkeit hinausgehen, dadurch, dass wir sie als Vielfaches oder Teilbrüche von Dingen darstellen, die für uns vorstellbar sind, oder dass wir sie sonst in Beziehung mit vorstellbaren Dingen bringen, ein Prozess, den Herbert Spencer beschreibt (siehe seine „First Principles“, Anfang des 2. Kapitels), und der in populären Zeitschr. sehr beliebt ist. Die ganze Kombinationslehre lässt sich in sehr klarer und einfacher Weise durch mehrdimensionale ebene Gebilde darstellen.

1) Riehl, „Der philosophische Kritizismus“, Bd. I, S. 100, 1876.

Erdmann wohl der Einzige von grosser Wichtigkeit ist. Unter den Mathematikern ist der einzige andere, der diesen Stoff eingehend von philosophischer Seite behandelt hat, der Engländer Russell. Fast alle späteren Anhänger der Metageometrie betrachten den empirischen Standpunkt als schon bewiesen und bieten keine neuen Argumente zu seinen Gunsten. Das Höchste, was sie tun, ist, einige der von Helmholtz und Erdmann gegebenen Gründe zu wiederholen. Wir werden sie daher ohne Bedenken ausser Acht lassen und unsere Aufmerksamkeit auf Helmholtz, Erdmann und Russell beschränken können.

§ 2. Helmholtz.

Helmholtz' Argumente für die empirische Natur der Axiome haben wir schon erörtert und kritisiert (oben S. 60 bis 84). Es sind ihrer drei. Das erste Argument versucht zu zeigen, dass der pseudosphärische Raum vorstellbar ist und aus einer Erfahrung entstehen würde, die verschieden wäre von der unsrigen. Dann würde die Kantische Behauptung, dass der euklidische Raum eine subjektive Form unserer Anschauung sein muss, weil wir uns keinen anderen vorstellen können, umgeworfen sein (siehe oben S. 60—67). Dies Argument haben wir kritisiert (oben S. 67—69) und als völlig unhaltbar erwiesen, und es wird in der Tat von den Metamathematikern nicht länger ernstlich behauptet. Es kann daher als vollständig abgetan angesehen werden.

Helmholtz' zweites Argument, das Argument von der Kongruenz und der Bewegung, haben wir S. 69—72 wiedergegeben und gezeigt, dass es zu einer sehr physischen Auffassung vom Raume führt und eine Hypostasierung der mathematischen Notwendigkeit involviert, die von den Philosophen scharf getadelt worden ist. Nichtsdestoweniger ist dies Argument dasjenige, das sich heute die dauerndste Geltung verschafft hat, und das die empirische Ansicht zum schärfsten Ausdruck bringt. Helmholtz sagt: „Die geo-

metrischen Axiome sprechen also garnicht über Verhältnisse des Raumes allein, sondern gleichzeitig über das mechanische Verhalten unserer festesten Körper bei Bewegungen"; und er behauptet, dass es nur diese Mischung von mechanischen und physikalischen Eigenschaften ist, die der Geometrie einen realen Inhalt verleiht und sie anwendbar auf die Erfahrung macht. Diese Behauptung scheint unglaublich bei einem Mann, der Kant gelesen hat; denn er lässt so die kritische Philosophie völlig ausser Acht (vgl. Russell, Foundations of Geometry, S. 71). Wenigstens hat Helmholtz nicht den Kritizismus von dem uralten Rationalismus unterschieden, den Kant zu überwinden suchte. Helmholtz nimmt an: was blos der Ratio entspringt, kann unmöglich eine notwendige Anwendung auf die Erfahrung haben, und ist tatsächlich nicht von blosser Phantasie zu unterscheiden. Indem er die Kantische Auffassung der Geometrie als etwas, was blos der Ratio entspringt, ansieht, schiebt er ihr den absoluten Rationalismus unter, den Kant entschieden verwarf. Denselben Irrtum werden wir später bei Erdmann sehen. Helmholtz lässt die Möglichkeit völlig unbeachtet, auf die Kant hingewiesen hat, dass gewisse a priori Prinzipien Bedingungen unserer Erfahrung sein könnten, und daher, obwohl a priori erkannt, dennoch notwendig auf die Erfahrung Anwendung fänden. Obgleich diese Möglichkeit verneint werden könnte, kann sie doch nicht ausser Acht gelassen werden bei einer Erörterung über den Ursprung unserer geometrischen Kenntnis, die auf Gründlichkeit Anspruch macht. Helmholtz dagegen nimmt als ganz selbstverständlich an, dass nur das, was aus der Erfahrung stammt, auf die Erfahrung anwendbar sein kann. Dies Prinzip ist sozusagen die grosse Keule der heutigen Empiristen geworden, eine Waffe, mittels deren sie im Stande sind, alle ihre Feinde mit einem Schlage zu besiegen;[1]) denn es ist ein Prinzip, das, wie Russell sagt,

---

1) Dies Prinzip klingt wieder durch bei James „Principles of Psychology", New York 1890, vol. II, wenn er in einer Anmerkung S. 664 sagt: „Kant, by the way, made a strange tactical blunder in his

niemals verfehlen kann, seinen Dienst zu leisten: denn, da alle Erkenntnis, sogar auch nach den Kantianern, schliesslich Beziehung auf die Erfahrung haben muss, muss ein solches Prinzip unvermeidlich alle Erkenntnis für empirisch erklären.[1]) Aber es ist auch eine Waffe, die zu tief schneidet: denn nach diesem Prinzip muss sogar die Logik und die Arithmetik für empirisch erklärt werden.[2]) Obwohl nun Erdmann die Analysis und die Arithmetik als empirisch ansieht,[3]) werden ihm nur wenige Metamathematiker so weit folgen wollen; noch wenigere werden so weit gehen mögen, die Logik empirisch zu nennen. Helmholtz selbst war von der Apriorität der Analysis und der Arithmetik fest überzeugt, und in der Tat sind es die meisten Metamathematiker. „Such a criterion, therefore," sagt Russell, „must pronounce everything empirical but must itself be pronounced worthless."[4]) Es beruht auf einem vollständigen Übersehen und Missverständnis des kritischen Standpunktes, wie wir oben gezeigt haben (S. 81—83).

Helmholtz' drittes Argument, auf das er, von seinen Kritikern gereizt, viel Sorgfalt verwandte, besagt: selbst wenn eine reine apriorische Geometrie in Kantischem Sinne möglich wäre, würde es noch nötig sein, durch die Erfahrung ihre Anwendbarkeit auf die Erfahrung nachzuweisen (oben S. 74—77). Dies Argument bemühte er sich sehr von der realistischen Hypothese unabhängig zu machen, deren ihn seine Gegner beschuldigt hatten, aber, wie wir gesehen haben (oben S. 77—80), ohne Erfolg. Helmholtz ist gänzlich an die realistische Hypothese gebunden, und dies,

---

way of showing that the forms of our necessary thought are underived from experience. He insisted on thought forms with which experience largely agrees, forgetting that the only forms which could not by any possibility be the results of experience would be such as experience violated."

1) Russell, S. 92.
2) a. a. O., S. 89.
3) Axiome der Geometrie, S. 167.
4) Russell, S. 72.

wie das vorhergehende Argument, entspricht Helmholtz' Unfähigkeit einzusehen, wie etwas, das lediglich ein Produkt des Geistes ist, notwendig für eine äussere Welt Gültigkeit haben kann, die völlig unabhängig von dem Geiste ist. Seine ganze Schwierigkeit liegt also in dieser Auffassung der äusseren Welt als einer von dem Geist ganz unabhängigen Realität, eine Annahme, die mit Kant ganz und gar in Widerspruch steht und schon den realistischen Hypothesen entspricht. Dies Argument ist in der Tat nur eine Präzisierung des vorigen und, wie dies, nur eine Anwendung jenes Prinzips, das Russell für wertlos erklärt.

Wir müssen daher schliessen, dass keines von Helmholtz' Argumenten für die empirische Natur der Geometrie beweisend ist.

§ 3. Erdmann.

Erdmann, dem wir jetzt unsere Betrachtung zuwenden müssen, schliesst sich in seinen Argumenten sehr eng an Helmholtz an. Er nimmt das Argument von der Bewegung und der Kongruenz an, dass die Geometrie einen empirischen Inhalt haben muss; auch das Argument von der Vorstellbarkeit des pseudosphärischen Raumes (S. 91),[1] dass die Form unserer Raumanschauung von der Beschaffenheit der äussern Dinge abhängig ist, finden wir von ihm akzeptiert (S. 165). Doch nach seiner Meinung gibt dies Argument nicht die Form dieser Abhängigkeit an, ob die Anschauung vollständig oder nur teilweise oder vielleicht auch garnicht den äussern Objekten gleicht, welche sie veranlassen (S. 116). Diesen wichtigen Punkt hält Erdmann durch die physiologischen Untersuchungen von Helmholtz für erledigt, welche zeigen, dass unsere Vorstellungen einer Wechselwirkung der Dinge auf uns entspringen, und daher teils durch diese, teils durch psychische Tätigkeiten bestimmt

1) Die Zitate im Text beziehen sich auf „Die Axiome der Geometrie“, Leipzig, 1877.

werden. Daher enthält jede Vorstellung ein Element, das empirisch, und eins, das a priori ist. „Der Gegensatz zwischen dem Apriorischen und dem Empirischen in unseren Vorstellungen ist deshalb kein Gegensatz verschiedener Vorstellungsgruppen, oder ihres Bildungsprozesses, sondern es ist ein Gegensatz der Betrachtungsweise," sagt Erdmann (S. 96). Daher schliesst er sich Helmholtz' Lehre an, „dass das ganze Material unserer Empfindungen nur ein Zeichensystem ist für die Dinge" (S. 93). Er sagt: „Wir halten deshalb an dem oben entwickelten Begriff eines materialen und formalen Zeichensystems fest. In dem Begriff desselben liegt nicht blos, dass es in allen seinen Beziehungen von den Verhältnissen der Dinge, die es wiedergebe, vollständig verschieden sei, sondern nicht minder auch, dass es alle jene Verhältnisse treu in seiner Weise zur Darstellung bringe. Dasselbe verlangt Korrespondenz zwischen den Vorstellungen und den Dingen in derselben Weise wie es ihre Kongruenz ausschliesst" (S. 95). Daraus folgt dann, dass die reine Form dieser Vorstellungen, d. i. ihre sinnliche Qualität, eine subjektive Schöpfung des Subjektes, der Inhalt, d. i. die Massbeziehungen und die Bestimmtheit nach drei Dimensionen (S. 95) eine Abbildung entsprechender Beziehungen der Dinge ist.[1]) Dabei tritt „ein wenig beachteter Parallelismus zwischen den Empfindungen und den sie formenden Elementen hervor" (S. 96). Umgekehrt können wir, wenn diese Tatsache festgestellt ist, dann auf die Dinge selbst zurückschliessen. Wir haben uns nur zu fragen, wie diese beschaffen sein müssen, „damit die tatsächlichen Merkmale unserer Raumvorstellung erklärlich werden" (S. 97). Dadurch wird die Geometrie eine induktive Wissenschaft, deren wahrer Gegenstand die Ermittelung der tatsächlichen Verhältnisse zwischen den Objekten der realen Welt ist. Diese Ansicht nennt er „formalen Empirismus" im Gegen-

---

1) Man wird bemerken, dass die hier von Erdmann den Worten „Form" und „Inhalt" gegebenen Bedeutungen die Umkehrung derer von Kant sind.

satz zu Kants Theorie, dass die Gesetzmässigkeit der Erscheinungen eine Eigenschaft der Anschauung, nicht der Dinge selbst ist, die er „formalen Rationalismus" nennt (S. 114).

Wir haben schon bei Besprechung dieser Ansicht bei Helmholtz gezeigt (siehe oben S. 72—74), dass sie annimmt, dass wir noch einen anderen Weg haben, zu den Objekten oder den Ursachen unserer Empfindungen zu gelangen, als durch die Empfindungen selbst (siehe oben S. 74), dass sie ausser Acht lässt, dass das, was bei physiologischen Untersuchungen das Objekt oder die Ursache unserer Empfindungen genannt wird, einfach eine andere Vorstellung ist, zu der wir nur auf einem anderen Wege gelangen, — und dass dieser empirische Gegenstand keineswegs mit dem transscendentalen Grund (der nur eine Idee sein kann) unserer Wahrnehmungen zu verwechseln ist. Erdmann rühmt bei Helmholtz „die lichtvollen Erörterungen über die Unähnlichkeit zwischen dem Prozess im Gehirn, welcher die Vorstellung eines Tisches begleitet, und dem Tische selbst" (S. 105). Aber was wissen wir von dem Tisch gesondert von der Vorstellung, die wir von ihm haben? Zwar können wir wissenschaftliche Experimente (Messungen etc.) machen und viel Belehrung darüber gewinnen, aber auch dies wird alles in der Form von Vorstellungen gegeben werden. Helmholtz sollte gesagt haben, dass zwischen der Vorstellung von einem Tisch und dem Gehirnprozess, der sie immer begleitet (wovon wir ebenfalls nur Vorstellungen haben), keine Ähnlichkeit besteht. Es läuft nur darauf hinaus, zu sagen, dass psychisch und physisch ganz verschiedenartig sind. Die ganze Untersuchung betrifft nur die Beziehungen zwischen gewissen Vorstellungen, die wir subjektive nennen, und gewissen andern, die wir objektive nennen. Sie hat durchaus nichts mit der Realität an sich zu tun, die unsern Wahrnehmungen zu Grunde liegen kann oder nicht, zu der man aber in keinem Falle jemals durch irgend eine physikalische oder psychologische Untersuchung gelangt.

Diese Verwechslung des empirischen Objektes mit dem transscendentalen Grund unserer Vorstellungen ist bei Erdmann um so bemerkenswerter, als er tatsächlich die Frage behandelt, „ob, resp. aus welchen Gründen der transscendente Schluss von der Wirklichkeit unserer Vorstellungen auf die Existenz von Dingen gerechtfertigt ist", besonders, „da wir in unsere Welt von Vorstellungen festgebannt sind" (S. 113). Aber wie Helmholtz, bemüht sich Erdmann zu zeigen, dass seine Ansichten unabhängig davon sind, ob dieser transscendentale Schluss berechtigt ist oder nicht (S. 117). Doch wie können sie das sein, wenn er diesen Schluss schon gemacht hat, als er zu ihnen gelangte, und wenn in der Tat die Theorie über die Natur unserer Empfindungen, die er annimmt, schon auf ihm beruht? Erdmanns Theorien sind ebensowenig frei von der realistischen Hypothese wie die Helmholtzschen Theorien, von denen sie eine genaue Nachbildung sind.

Dies geht auch deutlich aus der Tatsache hervor, dass er ebenso wie Helmholtz das a priori bei Kant in dem absoluten Sinne auffasst, als das, was schlechthin unabhängig ist, nicht nur von aller Erfahrung, sondern auch von allen Bedingungen der Erfahrung. Nach Erdmann gibt es keine Bedingungen der Erfahrung, die nicht ihre Begründung in jener äusseren Realität haben, unter der er den wirklichen Gegenstand der Erkenntnis versteht. Diesem gegenüber ist der Geist bei ihm ebenso gut eine tabula rasa wie bei Locke. Er malt nur die ihm durch die äussere Welt gegebenen Daten mit seinen eigenartigen Farben aus, bestimmt jedoch nichts in Bezug auf die Beschaffenheit dieser Daten. Daher kann das a priori nach Erdmann nur durch eine praestabilierte Harmonie mit der äusseren Realität übereinstimmen und uns dann Kenntnis davon geben (S. 114). Aus diesem Grund geht er sogar so weit, Kant einen naiven Realisten zu nennen (S. 115), und findet es widersprechend, dass Kant seine a priori Begriffe und Anschauungen auf die Erfahrung beschränken

wollte, da nach Erdmann nur das notwendig auf Erfahrung Anwendung finden kann und darauf zu beschränken ist, was von der Erfahrung abgeleitet wird. Dies sieht er als die Bedingung an, unter der allein Kants Entdeckung, dass alles Wissen auf Erfahrung beschränkt sei, aufrecht erhalten werden kann, und er hält diesen Satz für eine wichtige und notwendige Berichtigung der Kritik (S. 147). Dies alles zeigt nur, wie unmöglich es für Erdmann ist, sich von der Idee zu trennen, dass wirkliche Erkenntnis sich nur auf äussere Realität beziehen kann, eine Annahme, die die Erkenntnis absolut macht, und die mit einer idealistischen Hypothese unvereinbar ist.

Es ist in der Tat merkwürdig, dass diese empirische Theorie, die antimetaphysisch zu sein, sich auf das unmittelbar Gegebene zu beschränken vorgibt, sich wirklich auf die Annahme gründen sollte, dass die Erkenntnis nur unter der Bedingung wahr sei, dass sie absolut ist, während die entgegengesetzte, die transscendentale Theorie (die nur von Helmholtz, Erdmann und ihren Nachfolgern mit Absolutismus verwechselt wird) als ihren Hauptlehrsatz aufstellt, dass alle Erkenntnis relativ ist, dass sie eine rein menschliche Sache ist, dass sie sich nur darauf bezieht, wie die Dinge uns erscheinen, nicht aber, wie sie an sich wirklich sind, und alle Erkenntnis derjenigen Anordnungen ableugnet, durch die die Dinge so erscheinen, wie sie es wirklich tun, und in welcher Weise diese hätten anders eingerichtet sein können, damit die Dinge anders erscheinen. So versuchen die Mathematiker auf einer empirischen Grundlage absolute Erkenntnis aufzubauen, die uns in die entferntesten Gegenden des Transscendentalismus führt, während ihre Gegner auf transscendentaler Grundlage blos relative Erkenntnisse gewinnen wollen, die ganz und gar auf unsere eigene Erfahrung beschränkt sind. Dies scheinbare Missverhältnis, versichert uns jedoch Stallo, ist nur die natürliche und unvermeidliche Folge der An-

nahme, dass die Erkenntnis nur unter der Bedingung wahr sei, dass sie absolut ist.[1])

Nachdem Erdmann so bewiesen zu haben glaubt, dass die Geometrie empirisch ist, sucht er in dem letzten Kapitel seiner Schrift im einzelnen nachzuweisen, wie die Geometrie auf solchen empirischen Prinzipien aufgebaut werden und doch alle die charakteristischen Merkmale haben kann, die gewöhnlich von ihr gefordert werden, nämlich Einfachheit, Unveränderlichkeit, Allgemeinheit, Notwendigkeit, aber nur in relativem und beschränktem Sinne. Er zeigt dann weiter, wie alle ihre Grundbegriffe, wie Bewegung, Festigkeit, Veränderung etc. und sogar die Grundbegriffe der Analysis, wie Gleichheit und Grösse aus der Erfahrung abstrahiert werden. Aus diesem Grunde nennt er diese Begriffe „abstrakte Erfahrungsbegriffe".

Dabei nimmt er es als ausgemacht an, dass die Erfahrung die einzige Quelle unserer Begriffe ist, dass also keine Begriffe im Verstande vorhanden sein können, deren objektive Seitenstücke nicht in der Erfahrung zu finden sind, dass die wirkliche Existenz dieser Seitenstücke daher die notwendige Bedingung für die Bildung der Begriffe ist. So sagt er (S. 165), dass wir niemals die Begriffe Gleichheit, Grösse u. s. w. gebildet haben würden, selbst wenn wir die abstrakte Fähigkeit dazu hätten, wenn nicht gleiche Dinge in der Erfahrung zu finden wären. Wir würden sonst nicht einmal zählen lernen, behauptet er (S. 165), sodass sogar die Arithmetik unmöglich sein würde. Er vergisst, dass jeder Gegenstand, insofern er gedacht wird, als mit sich selbst identisch gedacht werden muss, wenigstens solange er ein Objekt des Denkens bleibt, und dass dies die unerlässliche Bedingung ist, unter der allein das Denken möglich ist. Hätten wir, wie auch die Dinge der Erfahrung sich ändern mögen, nicht die Fähigkeit, sie wenigstens einen Augenblick im Verstande zu fixieren, so würden wir über-

1) Concepts and Theories of Modern Physics, S. 186, 214.

haupt nicht denken können. Identität ist daher nicht durch die Erfahrung gegeben, sondern durch das Denken. Erinnerung selbst würde ohne den Begriff der Identität unmöglich sein; denn wie könnten wir dieselbe Vorstellung wiedererkennen, wenn sie zurückkehrte, ohne diesen Begriff? Sogar James, der radikale Empirist, erkennt die Apriorität dieses Begriffes als den einzigen Grund an, auf den hin Unterscheidung und Vergleichung möglich ist.[1]) Aber noch weiter. Man braucht nicht nur keine unveränderlichen Objekte in der Erfahrung zu finden, um den Begriff Identität zu bilden, sondern die Welt wird tatsächlich heutzutage von vielen Physikern aufgefasst als ein Ort, wo überhaupt keine zwei Objekte gleich sind, nicht einmal zwei Atome. Die neue Disintegrationstheorie von Rutherford,[2]) die auf den Eigenschaften des Radiums beruht, nimmt an, dass alle Atome einem langsamen Zerbrechen in einfachere Formen unterworfen sind. Nach dieser Theorie gibt es daher tatsächlich nichts Festes in der Welt, ausgenommen vielleicht die Gesetze, nach denen jener Prozess stattfindet. Aber auch diese brauchen nicht fest zu sein. Es lässt sich ebenso wenig beweisen, dass die letzten Elemente des Universums festen Gesetzen unterworfen sind, wie es unmöglich ist zu beweisen, dass sie selbst fest und unveränderlich sind; — und es ist ebenso unnötig und gleichgültig für uns. Die Welt kann, so weit wir wissen, noch in ihren letzten Elementen nicht nur aus ganz heterogenen Dingen zusammengesetzt sein, sondern auch aus solchen Dingen, die keinen bestimmten Gesetzen folgen, Elementen, deren Verhalten im höchsten Grade unregelmässig ist.[3]) Aber es ist nichts so unregelmässig, dass es nicht durch hinreichende Zusammensetzung einfacher Gesetze als regelmässig aufgefasst werden kann.

---

1) Principles of Psychology, Bd. I, S. 459—462.
2) Radio-Activity. Cambridge 1904.
3) Vgl. James, a. a. O., S. 460.

Jevons sagt: „Science arises from the discovery of Identity amidst Diversity.“ [1]) Man sollte eigentlich sagen: Die Wissenschaft entsteht durch die Entdeckung, dass die Verschiedenheit, die wir rings um uns finden, dargestellt werden kann als das Resultat identischer Dinge, die auf identische Weisen wirken. Wir haben nur diese Dinge klein genug zu nehmen, damit es eine genügende Zusammensetzung der identischen Weisen geben und jede gegebene Verschiedenheit auf diese Weise dargestellt werden kann. Aber wir entdecken diese Identitäten nicht — wir erfinden sie. Ob solche identischen Dinge oder solche festen Gesetze tatsächlich in der Natur existieren oder nicht, liegt ganz ausser unserer Macht zu bestimmen. Identität ist daher etwas, das gänzlich aus dem Verstande entspringt, wofür es kein korrespondierendes Objekt in der Erfahrung zu geben braucht, ja nach der gewöhnlichen Auffassung der Natur nicht geben kann. Wir sind es, die darauf bestehen, das Netzwerk unserer eigenen Gesetzmässigkeit über sie zu ziehen, da das der einzige Weg ist, wie wir sie uns dienstbar machen können, der einzige Weg, wie wir das tun können, was wir „sie verstehen“ nennen. Aber nur da, wo die Natur sich dieses Netzwerk gefallen lässt — was nicht überall der Fall ist — sprechen wir von Erkenntnis. Auf einigen Gebieten ist dies viel schwieriger als auf anderen, auf einigen wird es uns vielleicht nie gelingen. Wir schreiten aber so weit vor, wie wir können, und hoffen immer näher an das Ziel zu kommen. Wir können nicht behaupten, dass die Natur völlig determiniert ist, aber nur unter dieser Bedingung wäre sie uns völlig begreifbar.

Auch würde eine vollständige Verschiedenheit der Objekte nicht ihre Zählbarkeit ausschliessen, wie Erdmann behauptet (S. 165). Wie verschieden sie auch sein mögen, sie können immer als Dinge oder Ereignisse oder auf irgend eine andere Weise klassifiziert werden. Der Verstand hat immer irgend einen obersten Begriff, unter den sie zu-

1) So beginnt er die Einleitung zu seinen „Principles of Science“.

sammengefasst und als ähnlich betrachtet werden können. — Es kann also Identität hineingelegt werden, wo auf den ersten Blick keine zu sehen ist.[1])

Ähnlich wurde von Helmholtz betont, dass, wenn keine starren Körper in der Erfahrung zu finden wären, wir keinen Begriff von Starrheit, also keine Geometrie haben würden. Dies Prinzip klingt sogar wieder bei einem so modernen Autor wie Poincaré,[2]) der behauptet, in einer ganz aus flüssigen Körpern bestehenden Welt würde Geometrie unmöglich sein. Diese Ansicht wurde schon von Weissenborn[3]) (der die Fiktion erfunden zu haben scheint) bestritten, da die Grenzen solcher flüssigen Körper noch geometrische Figuren darstellen würden. Ähn-

---

1) Eine vorzügliche Illustration hierzu ist ein prächtiger Scherz, der kürzlich in einem Witzblatt erschien. Er war überschrieben: „A mixed Record". Ein Bettler trug ein Plakat um seinen Hals, auf dem Folgendes stand:

Schlachten	7
Wunden	6
Kinder	10
Summa	23

Dies scheint allerdings eine Vermischung ganz heterogener Dinge zu sein, doch können sie alle zusammengefasst werden unter die eine Rubrik „Unglücksfälle".

2) La science et l'hypothèse, S. 60, 1902. Obwohl Poincaré S. 80 behauptet, dass das Vorhandensein physisch starrer Körper für unsere Geometrie notwendig ist, behauptet er S. 90, dass sich unsere Geometrie nicht wirklich mit diesen beschäftigt, sondern mit „certains solides idéaux absolument invariables" und weiter: „La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir". Dies Argument, dass, obwohl physische Körper nicht absolut starr sein können, sie dennoch für den Verstand die Gelegenheit bieten, den idealen Begriff von absolut starren Körpern zu bilden, braucht nicht hier diskutiert zu werden, da dasselbe Argument, auf die Gerade angewandt, weiter unten besprochen wird, und die Besprechung auch hier Anwendung finden kann. Ebenso findet sie Anwendung auf die Behauptung, dass nur eine anscheinende Gleichheit der Körper genügt, um in uns schliesslich den Begriff der absoluten Gleichheit zu bilden.

3) Über die neueren Ansichten . . . Art. III, S. 461, 1878.

lich meint Russell,[1]) um für solche flüssige Welt möglich zu sein, müsste es darin Verschiedenheiten geben, die Gelegenheit bieten, unsere idealen mathematischen Begriffe zu bilden. Sicher erfordert das Denken ein Objekt, auf das es seine Anwendung finden muss, aber nicht aus diesem Grunde sind die Kategorien, die es anwendet, notwendig empirisch. Wenn die Geometrie davon abhängen würde, den Begriff der Starrheit aus der Erfahrung zu erwerben, würde sie nicht einmal in unserer Welt möglich gewesen sein, da es auch bei uns ebensowenig geometrisch starre als wirklich gleiche Körper gibt.[2])

Trotz alledem erkennt Erdmann hinsichtlich der geometrischen Konstruktionsbegriffe die Ansichten der Rationalisten an und versucht sie empirisch zu erklären. Er gibt zu, dass die „Konstruktionsbegriffe" nicht ganz dasselbe sind wie die „abstrakten Erfahrungsbegriffe"; denn bei der Bildung des Begriffs einer Linie „sehen wir nicht bloss ab von den differenten übrigen Merkmalen, sondern auch von der gleichartigen . . . . zweiten und dritten Dimension, die wir tatsächlich bei allen Körpern mit der ersten zusammenfinden"; und daraus folgt: „Dass die Ausdehnungsverhältnisse der Flächen und Linien nicht allein keine

---

1) Foundations of Geometry, S. 80, 1897.

2) Folgende Philosophen haben auch die Theorie verworfen, dass geometrische Starrheit eine physische, aus der Erfahrung abgeleitete Eigenschaft ist, und behauptet, dass sie ein idealer Begriff sei, an dessen Bildung das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein physischer Körper nicht den geringsten Anteil habe:

Land, S. 44—45, 1877.
Sigwart, „Logik", II, S. 73, 1878.
Jacobson, S. 140—142, 1883.
Zindler, S. 10, 1899.
Milau, S. 29, 1901.
Natorp, S. 373, 1901.

Wegen der genauen Titel s. das Literaturverz. Siehe auch die Besprechung der Transportierbarkeit der geometrischen Figuren, mit der dies eng verbunden ist, weiter unten S. 230 u. das Verz. d. betreff. Philosophen Anmerkung S. 230 und 231.

beobachtbaren Eigenschaften der wirklichen Körper repräsentieren, sondern sogar, wie schon früher bemerkt wurde,[1]) nicht einmal in der Vorstellung anschaulich vollzogen werden können. Noch mehr unterscheiden sich die Konstruktionsbegriffe von den empirischen Gattungsbegriffen hinsichtlich der Massbeziehungen. Hier ist es nicht eine zweite Abstraktion, die zu der Analyse und Abstraktion der Merkmale hinzukommt, sondern eine Veränderung, die mit den gemeinsamen Merkmalen vorgenommen wird. Es gibt keine Linie in der Natur, die vollkommen gerade ist, keinen Kreis, dessen Peripherie in jedem Punkt dasselbe Krümmungsmass besitzt. Offenbar liegt nun hier kein einfacher Abstraktionsprozess vor, der etwa darin bestände, dass wir von den Unregelmässigkeiten absehen, die den geometrischen Begriff in der Natur tatsächlich entstellen. Denn damit wir jene Unregelmässigkeiten als solche zu erkennen vermöchten, müsste doch der Begriff, den wir bilden wollen, bereits zu Grunde liegen. Dazu kommt, dass wir sehr wohl im stande sind, diesen begrifflichen Forderungen in der anschaulichen Vorstellung streng zu genügen. In Gedanken können wir mit voller Sicherheit Linien konstruieren, die genau gerade, und Kreise, deren Peripherien ganz gleichmässig gekrümmt sind, während wir nie im stande sein werden, dieselben nur nach einer Dimension ausgedehnt anzuschauen. Die Massbeziehungen der Konstruktionsbegriffe sind deshalb weder tatsächliche Eigenschaften der Körper, noch aus ihnen schlechtweg abstrahierte Begriffe, sondern empirische Ideen; sie verändern die beobachtbaren Eigenschaften der elementaren Körperformen so, dass sie ideale Musterbilder werden, denen alle Wirklichkeit beliebig nahe gebracht werden kann, die sie aber niemals zu erreichen vermag." (S. 157—158). Kein Rationalist hätte die Sache besser oder präziser ausdrücken können. Zugleich fügt Erdmann in einer Anmerkung Seite 158 am Ende hinzu: „Die obigen Ausführungen mögen zugleich dazu dienen, die Behauptung

1) S. 37 und S. 44, Anm. 2 der Erdmann'schen Schrift.

Mills (A System of Logic, 8. Aufl., Bd. II, S. 258 ff.) zu berichtigen, dass weder in der Natur noch im menschlichen Geist irgend welche Objekte existieren, die den Definitionen der Geometrie entsprechen." Nachdem Erdmann aber so nachgewiesen hat, dass der Begriff der Geraden nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden kann, weil solche Linien nicht in der Erfahrung existieren, dass solche in der Erfahrung sich findende Annäherungen an gerade Linien nur erkannt werden mittels der Tatsache, dass wir diesen Begriff schon haben und sie durch ihn beurteilen — eine Argumentation, die auch auf die früher behandelten Begriffe anwendbar ist —, so muss man staunen, wenn Erdmann diesen Begriff nichtsdestoweniger eine „empirische Idee" nennt. Er gibt zu, dass der Begriff ideal ist, d. h. dass er etwas mehr enthält, als die Erfahrung jemals geben könnte. Dieses „mehr" muss dann durch den Geist geschaffen sein, ganz ohne Zutun der Erfahrung, — ein Schluss, der seiner vorigen Behauptung widerspricht, dass nur die Empfindungsqualitäten unserer Vorstellungen subjektiv sein können; denn die Merkmale, die hier geändert sind, gehören den Massbeziehungen an. Doch sagt er (S. 159), „dass die Idealität der Konstruktionsbegriffe ihren empirischen Ursprung nicht ausschliesst. Der Beweis liegt darin, dass solche empirischen Ideen nicht blos die konstruktive Grundlage der Geometrie bilden, sondern einen integrierenden Bestandteil des Fundamentes aller mathematischen Wissenschaften ausmachen, selbst derjenigen, deren empirischer Charakter infolge ihrer unmittelbaren Beziehungen auf die Gegenstände der Aussenwelt .... nicht geleugnet werden kann". Die Definitionen der Mechanik z. B. sagt er weiter, beziehen sich gleichfalls auf die mathematischen Konstruktionsbegriffe. Daher ist es klar, dass in diesem Punkt Erdmanns Empirismus nur durch die nachdrückliche Anwendung des Prinzips gerettet wird, das, wie Russell sagt (oben S. 131), niemals verfehlen kann, alle Erkenntnis für empirisch zu erklären, und das Erdmann

nur anzuwenden scheint, wenn alle andern Gründe für eine empirische Ansicht versagen.[1])

In Wirklichkeit hat Erdmann hier bewiesen, dass der Begriff der Geradheit a priori ist. Er hat nur darauf bestanden, ihn doch empirisch zu nennen. Sein ganzes Argument ist in Wirklichkeit eine Bestätigung von Kants Behauptung, dass der apriorische Ursprung mathematischer Begriffe nicht unvereinbar ist mit ihrem empirischen Gebrauch, was Erdmann bestritten hatte. Obwohl wir daher schliessen müssen, dass es Erdmann mit dieser Argumentation nicht gelungen ist, den empirischen Ursprung der mathematischen Begriffe nachzuweisen, so ist sie doch eine der besten und folgerichtigsten, die jemals zur Bestätigung desselben vorgebracht sind. Die Mehrzahl der neueren mathematischen Empiristen betrachten diese Begriffe einfach als Abstraktionen aus der Erfahrung, nehmen also das Argument an, das Erdmann selbst als unzureichend verwirft.[2])

Das „mehr", das, wie Erdmann zeigte, nicht aus der Erfahrung kommt, sondern aus dem Verstande, ist durchaus nicht etwa äusserst gering und unwichtig, so dass es die Begriffe so wenig von seinen empirischen Annäherungen verändert, dass wir es ebensogut vernachlässigen könnten. Im Gegenteil, gerade dieses „mehr" macht das wesentliche Merkmal des Begriffes aus. O. Hölder z. B. sagt, wo er von der Unzulässigkeit astronomischer Messungen spricht:[3]) „Wir könnten den Lichtstrahl, der in das Fernrohr des Beobachters eingemündet ist, als nicht völlig geradlinig annehmen; denn wir könnten selbst dann, wenn ursprünglich der Begriff der Geraden an der Sehlinie abstrahiert worden ist, doch nachträglich den Begriff der genauen Geraden an die euklidischen Axiome knüpfen und nun Gerade und Sehlinie unterscheiden." Damit wird zugegeben, dass wir

---

1) Siehe Russell, S. 92.

2) Siehe z. B. die Zitate aus Schömilchs Handbuch der Mathematik, oben S. 116, Anm. 1.

3) Anschauung und Denken, S. 70, Anm.

zwar eine ungenaue Idee von einer Geraden aus der Erfahrung erlangen können, dass aber der genaue Begriff, durch den allein die Ungenauigkeit dieser empirischen Idee entdeckt werden kann, nur a priori erlangt werden kann. Dieser a priori Begriff muss also als der wahre anerkannt werden, da er der Massstab ist, nach dem alle anderen gemessen werden. Wie wenig sich die ungenaue Idee von diesem Begriff unterscheiden mag: Unmöglich kann der Massstab als weniger wichtig angesehen werden, als das, was damit gemessen wird.

Eine etwas abweichende Form dieser Beweisführung, die manchmal gegeben wird, verdient einige Aufmerksamkeit. Es wird gesagt, der Begriff der mathematischen Geradheit werde aus der Erfahrung abgeleitet, weil wir in der Erfahrung, obwohl darin keine absoluten Geraden zu finden sind, nichtsdestoweniger alle Grade der Annäherung finden. Diese können wir nach ihrer Vollkommenheit der Reihe nach ordnen. Der Verstand dann geht, indem ihm sozusagen durch diese Erfahrung die wahre Richtung gegeben wird, über die Erfahrung hinaus und bildet den Begriff einer vollkommen geraden Linie, d. h. einer Linie ohne irgend welche jener Unvollkommenheiten, die selbst die besten natürlichen Muster aufweisen. Es wird hier also zugegeben, dass der Begriff der Geradheit mehr enthält, als die blosse Erfahrung gibt, aber es wird auch behauptet, dass die Erfahrung die Richtung andeutet, in der die Veränderungen gemacht werden, um zu diesem Begriff zu gelangen. Der Begriff darf daher ein empirischer genannt werden. Diese Argumentation enthält einen subtilen Fehlschluss. Um unsere Objekte nach ihrer Geradheit zu ordnen, um eine Linie als gerader als die andere zu erkennen, müssen wir schon den Begriff von der Geradheit haben. Ohne diesen Begriff könnten wir das eine Objekt nur als verschieden von dem andern erkennen, ohne dass wir imstande wären, die Art seiner Verschiedenheit anzugeben. Daher gelingt es dieser Argumentation ebenso wenig wie

der Erdmanns, den empirischen Ursprung der Geradheit zu beweisen.[1])

Ein anderer Beweis, der in neuerer Zeit zu Gunsten des empirischen Ursprungs der mathematischen Begriffe vorgebracht worden ist, ist folgender.[2]) Es wird in Abrede gestellt, dass uns die Erfahrung keine Geraden und keine vollkommenen Kreise aufweist, weil viele von den Geraden und Kreisen, die wir sehen, keine sichtbaren Abweichungen von der Vollkommenheit zeigen. Sie scheinen vollkommen, daher sind sie für uns vollkommen, und so sind sie unsere Massstäbe. Vergrösserung zeigt uns zwar, dass sie nicht sind, was sie zu sein scheinen und lässt sie die Vollkommenheit verlieren, die sie zuerst darboten. Aber das bedeutet

---

1) Es muss bemerkt werden, dass diese Vorstellung von der Geradheit, die wir haben müssen, um ihre Objekte in der Natur zu erkennen, nicht ein mathematisch genauer Begriff zu sein braucht, zu dem wir erst nach Überlegung kommen, und dass obiges Experiment, obgleich es uns nicht lehren kann, was Geradheit an sich selbst ist, uns doch dazu helfen kann, zu verstehen, was mit mathematischer Geradheit gemeint ist. Dem nichtmathematischen Verstand erscheinen viele Dinge in der Welt als vollkommen gerade. In unserer Jugend sahen wir unser gewöhnliches Lineal so an, und viele Menschen kommen nie dazu, zu begreifen, dass sogar die vollkommensten Instrumente ungenau sind. Wenige haben eine Idee, bis zu welchem Grade die Ebenheit eines guten optischen Prismas die einer gewöhnlichen Tischplatte übertrifft. Man muss lernen, dass all diese Dinge ungenau sind, dass eine hinreichende Vergrösserung diese Ungenauigkeiten merkbar machen würde, dass nichts in der Erfahrung den Anforderungen mathematischer Geradheit entsprechen kann; denn diese verlangt, dass absolut keine Unregelmässigkeiten erscheinen, ganz gleich, wie gross die angewandte Vergrösserung sein mag. Auf diese Weise kommen wir zu einem angemesseneren Begriff mathematischer Geradheit; dabei wird aber immer jene ursprüngliche, wenn auch unbestimmte Vorstellung der Geradheit vorausgesetzt. Denn, um die Genauigkeit eines Prismas zu prüfen, lassen wir einen Lichtstrahl von ihm zurückwerfen, oder irgendwie sonst suchen wir seine Mängel der Art zu übertreiben, dass sie dem Auge sichtbar werden. Unsere ursprüngliche Vorstellung der Geradheit bleibt also immer die Grundlage, auf die der präzise Begriff gebaut wird.

2) Siehe F. Le Dantec, „La logique et l'expérience". Revue phil. XXIX, 1, S. 46—69, 1904. Auch sein Buch „Les lois naturelles". Paris 1904.

nur, dass die vergrösserten Bilder von den ursprünglichen Bildern abweichen, von denen wir unsere Vorstellung von Vollkommenheit ursprünglich erhielten. Diese wunderschön einfache Theorie leidet an denselben Fehlern, wie die vorigen. Wie sollen wir wissen, welche von diesen Bildern, die vergrösserten oder die nicht vergrösserten, als die vollkommensten in dieser Hinsicht anzusehen sind, wenn wir nicht schon wissen, was mit vollkommenen Geraden und Kreisen gemeint ist. Unmittelbare Empfindung lehrt uns nur, dass die beiden Arten von Eindrücken verschieden sind, lehren uns aber nicht, worin sie verschieden sind. Dieser Beweis ist sogar noch weniger stichhaltig als die vorigen Argumentationen.

Dies sind, so viel ich weiss, ausser denen von Mill, die einzigen wichtigen Beweisversuche, die zur Bestätigung des empirischen Ursprungs der geometrischen Grundbegriffe vorgebracht sind. Der Gegenstand ist nur wenig behandelt worden. Mehr Aufmerksamkeit ist den Axiomen geschenkt und den Fragen, ob die Geometrie eine induktive Wissenschaft ist oder nicht, und ihren Beziehungen zu den andern induktiven Wissenschaften. Das ist bedauerlich, da die Frage, ob die geometrischen Grundbegriffe a priori sind oder nicht, die anderen Fragen einschliesst. Wenn die Begriffe nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden, dann kann auch unsere Kenntnis von ihren möglichen Beziehungen, wie sie in den Axiomen gegeben sind, und die darauf sich gründende Geometrie, nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden. Denn was kann uns die Erfahrung lehren über Dinge, die nicht einmal in der Erfahrung existieren? Diese Frage wird weiter unten erörtert werden.

Obwohl Erdmann auf der empirischen Natur der Geometrie besteht, muss er nichtsdestoweniger die gewaltigen Unterschiede anerkennen, die zwischen der Geometrie und den anderen empirischen Wissenschaften vorhanden sind, Unterschiede nicht nur des Grades, sondern auch der Art, Unterschiede, die sogar gewisse Gegensätze zeigen. Ein

grosser Teil des letzten Kapitels seiner Schrift befasst sich mit einer Aufzählung dieser Unterschiede und einem Versuch, sie empirisch zu erklären. Hiermit haben wir uns jetzt zu beschäftigen.

Wie wir bereits gesehen haben, behauptet Erdmann zwar, dass geometrische Begriffe aus der Erfahrung abstrahiert werden, aber er gibt doch zu, dass sie nicht in ganz derselben Weise abstrahiert werden, wie die anderen empirischen Begriffe, insofern nicht nur von variablen Elementen der Anschauungen abstrahiert wird, sondern auch gewisse gleichartige Elemente fallen gelassen werden (oben S. 141—142). Ausserdem werden die zurückbleibenden Merkmale auf eine gewisse charakteristische Weise verändert, wofür die Erfahrung keinen hinreichenden Grund gibt (S. 160), d. h. die Begriffe werden idealisiert. Doch trotz dieser offenbar willkürlichen Abweichung von der Erfahrung werden diese Begriffe angesehen, als hätten sie nicht nur nichts von ihrer Anwendbarkeit auf die Erfahrung verloren, sondern als wären sie sogar „Musterbilder“ geworden, wodurch die Erfahrung so beurteilt wird, dass „nicht sie durch die Erfahrung, sondern bisher die Erfahrung überall durch sie korrigiert worden ist“ (S. 140). Solche Abweichung von der Erfahrung bei den Grundbegriffen der anderen Wissenschaften würde diese zugleich unsicher machen, würde als willkürlich angesehen werden, wenn nicht als metaphysisch. Wie kommt es, dass im Gegenteil bei den mathematischen Grundbegriffen diese Abweichung von der Erfahrung sie nur um so sicherer für die Erfahrung gültig macht?

Ferner: „Die Grundbegriffe der Geometrie . . . . sind die einfachsten, selbstverständlichsten Abstraktionen ihres Gebiets, deren systematische Aufzählung zu den frühesten Errungenschaften des geometrischen Denkens gehört“ (S. 138), während die Grundbegriffe der anderen Wissenschaften „die schwierigsten, dunkelsten Begriffe, die letzten Probleme der Wissenschaft“ sind (S. 138). Dazu gehören sie auch zu den schwankendsten, noch heute nicht gesicherten Begriffen

der Wissenschaft (S. 139). „Die ersteren sind, inhaltlich betrachtet, vollendete, die letzteren werdende Begriffe" (S. 156). Nichts hat uns ferner je von der Notwendigkeit einer Veränderung in den mathematischen Grundbegriffen überzeugt, „sodass wir in Wirklichkeit dahin gelangt waren, die Erscheinungen der Körperwelt garnicht mehr darauf hin zu untersuchen, ob sie zu einer Korrektion der geometrischen Grundlagen Anlass geben könnten. Und selbst seitdem eine solche Möglichkeit verständlich geworden ist, hat doch nichts bis jetzt zu der Vermutung berechtigt, dass eine solche Korrektur einmal erforderlich sein werde" (S. 139).

Noch grössere Unterschiede sind zu finden in den Methoden der beiden Wissenschaften. Obwohl Erdmann es durch die „Englischen Logiker" als bewiesen ansieht, dass die Geometrie eine induktive Wissenschaft ist (S. 172), obwohl er es als erwiesen voraussetzt, dass kein Syllogismus ohne Induktion möglich ist (S. 140, Anm.) (als ob der Syllogismus die einzige Form der Deduktion wäre), kann er doch nicht leugnen, dass die Methode der Mathematik fast ausschliesslich deduktiv ist, und dass diese Deduktion auch stattfindet, „von jeder besonderen Erfahrung .... vollständig unabhängig" (S. 140). Doch es ist nicht nur nicht zu befürchten, dass bei solcher Deduktion schliesslich ein Resultat erreicht würde, das mit der Erfahrung nicht in Einklang stände, sondern es findet nicht einmal selbst nach der längsten Deduktion ein Verlust der Allgemeinheit, Notwendigkeit, Unveränderlichkeit etc. statt, welche (obwohl nur relativ nicht absolut) den ursprünglichen Axiomen eigen war, mit welchen begonnen war (S. 167). Nichts könnte in schrofferem Gegensatz stehen zu den empirischen Wissenschaften. Hier gibt es einen beständigen Verlust an Allgemeinheit etc. bei der Deduktion, sodass solche Deduktion nur eine kleine Strecke und nur unter der grössten Vorsicht und unter beständigem Prüfen auf Übereinstimmung mit der Erfahrung geführt werden kann. Doch wir haben gesehen, dass die Grundbegriffe dieser Wissenschaften fest an

die Erfahrung gebunden sind, sodass es scheinen müsste, wenn irgend etwas, so würden gerade sie besser mit der Erfahrung übereinstimmen, als die Mathematik, die schon in der Bildung ihrer Begriffe eine gewisse Unabhängigkeit zeigte, die noch mehr in ihrem Gebrauch hervortritt.[1]) Was ist die Erklärung dieser auffallenden Unterschiede, die keiner besser oder vollständiger aufgezählt hat, als Erdmann selbst? Wie vertragen sie sich mit der Theorie, dass die Mathematik eine empirische Wissenschaft ist, wie alle andern Wissenschaften?

Für alles dies hat Erdmann eine einzige Erklärung. „Der Grund, ...“ sagt er, „liegt in dem Gegensatz, der die quantitativen Beziehungen der Dinge von den quali-

---

1) Tatsächlich ist Erdmann als Empiriker nicht berechtigt, zu behaupten, dass absolut kein Verlust an Allgemeinheit u. s. w. in der mathematischen Deduktion stattfinde, selbst wenn das ursprünglich Bessere nicht absolut, sondern nur relativ war. Wenn er es tut, so stellt er nur die unerschütterliche Überzeugung aller Mathematiker fest. Aber wenn diese Überzeugung eine empirische Grundlage hat, so können die Mathematiker nur meinen, dass sie, nachdem sie so oft sorgfältig die Resultate der mathematischen Deduktion mit der Erfahrung verglichen und niemals einen merklichen Verlust an Allgemeinheit etc. selbst nach den längsten ausgeführten Deduktionen gefunden haben, sich überzeugt haben, dass kein ernstlicher Irrtum bei Annahme keines Verlustes irgendwelcher Art sich einstellen wird. Nichtsdestoweniger können sie nicht positiv behaupten, dass kein Verlust vorhanden ist, sondern nur, dass bis jetzt kein messbarer Verlust entdeckt worden ist, dass er daher sehr viel geringer sein muss, als bei den empirischen Wissenschaften. Aber nicht nur die Geschichte der Mathematik spricht gegen diese Auffassung, da es sich nicht einer hat einfallen lassen, solche Prüfungen anzustellen, sondern solche Prüfungen sind tatsächlich unmöglich. Die Resultate verwickelter Berechnungen werden häufig durch die Erfahrung bestätigt, aber irgend welche sich ergebenden Widersprüche werden niemals den Berechnungen zugeschrieben (wofern nicht Näherungswerte angewandt sind), sondern der Ungenauigkeit der ursprünglichen Hypothesen. Es ist bereits angenommen, dass die Berechnungen selbst keinen Verlust einschliessen, und nur bei solcher Annahme ist eine Prüfung der Hypothesen möglich, denn läge ein Widerspruch aus beiden Ursachen vor, so würde die Erfahrung sie niemals unterscheiden können, weil diese nur den ganzen Fehler messen kann.

tativen trennt, speziell ausgedrückt, in dem Gegensatz des gleichartigen Anschauungsstoffes der Geometrie zu dem ungleichartigen Material der nichtmathematischen Disciplinen. Die Elemente unserer Raumanschauung, die einzelnen kleinsten Raumteile und die aus ihnen abgeleiteten Flächen- und Linienelemente, sind in sich gleichartig, ebenso wie die Einheiten des Zahlbegriffs und der Grössenbegriffe überhaupt, da in den letzteren auch da, wo ursprünglich ungleichartige Elemente vorhanden waren, durch die Integration d. h. durch die Summierung der ins Unendliche verkleinerten Elemente eine solche Gleichartigkeit überall hergestellt wird" (S. 160, 161). „Jene tatsächliche Gleichartigkeit der geometrischen Elemente nun . . . . macht es möglich, die geometrischen Konstruktionsbegriffe als Ideale zu fassen" (S. 161) und zu zeigen, dass dies sie um nichts weniger empirisch macht. Es erklärt ihre (relative) Allgemeinheit u. s. w., daher ihre Stabilität. Sie erklärt, warum die deduktive Methode anwendbar ist (S. 172), warum sie ausgeführt werden kann, unabhängig von jeder besonderen Erfahrung (S. 170); doch ist sie nicht weniger anwendbar auf die Erfahrung (S. 171) und völlig ohne Verlust an Allgemeinheit, Notwendigkeit u. s. w. (S. 167). Wie es diesem Prinzip gelingt, alles dies zu erklären, ist mir nicht ganz klar; — aber das ist gleichgiltig. Wenn, wie Erdmann in der oben zitierten Stelle sagt, bei der Einführung des Unendlichklein eine solche Gleichartigkeit selbst da hergestellt wird, wo sie ursprünglich nicht existierte, ist das denn nicht eine ähnliche Abänderung der Merkmale, eine ähnliche Idealisierung des Vorhandenen, wofür der hinreichende Grund nicht in den Wahrnehmungen selbst liegt, wie die, die mit dem geometrischen Grundbegriff vorgenommen wurde? Wie können wir die letztere Idealisierung durch die erstere erklären? Wo können wir in unseren Wahrnehmungen eine solche Gleichartigkeit finden, wie sie Erdmann beschreibt? Solch eine gleichartige Raumanschauung, wo jedes darin ent-

haltene Ding ebenso gleichartig ist, kann kein Objekt der Empfindung sein, da letztere unbedingt qualitative Verschiedenheiten verlangt. Auch kann sie nicht blosse Abstraktion von Empfindung sein, da, wenn wir von qualitativen Unterschieden gänzlich abstrahieren, dann absolut nichts in der Empfindung übrig bleibt. Solche Gleichartigkeit kann nur ein Objekt des Denkens sein, ideal im höchsten Sinne des Wortes. Wenn wir etwas darin finden können, so beruht das nicht auf Wahrnehmungen, denn Gleichartiges vermögen wir nicht wahrzunehmen, sondern darauf, dass wir dieses Etwas darin gedacht haben. Da nun diese gleichartige Anschauung völlig ideal ist, nicht aus der Erfahrung abstrahiert, sondern durch den Verstand geschaffen, zum Zweck der Geometrie, so kann sie die Idealität der geometrischen Begriffe nicht erklären. Ferner, da Erdmann die Notwendigkeit dieser reinen Raumvorstellung als die einzige Grundlage annimmt, auf der die geometrische Synthese möglich ist (S. 167), so kann ich nicht einsehen, dass seine Theorie sich sehr von der sogenannten transscendentalen unterscheidet, wonach eine nichtempirische Raumanschauung für die Geometrie notwendig ist. Wie vorher den Begriffen, hat Erdmann auch hier seiner reinen Raumanschauung blos den Namen einer empirischen beigelegt.

Kurz zusammengefasst: Ich muss schliessen, dass Erdmann mit allen Argumentationen, die er vorgebracht hat, um die empirische Natur der Geometrie zu beweisen, nicht das Richtige getroffen hat. Wir haben gesehen, dass die Argumente von der angenommenen Vorstellbarkeit des pseudosphärischen Raumes sowohl, wie die von der Starrheit und Bewegung hinfällig sind. Wir haben gesehen, dass physiologische Untersuchungen kein Licht auf die Frage werfen können, wir haben gesehen, dass es Erdmann ebenso wenig wie Helmholtz gelungen ist, sich von der realistischen Hypothese zu befreien, die (wie auch seine Auffassung von Kant zeigt) die wahre Grundlage seiner

Ansichten ist. Es ist ihm auch nicht gelungen zu zeigen, wie mathematische Begriffe ideal sein könnten und doch empirisch. Er erreichte hierin nur einen scheinbaren Erfolg durch die Anwendung jenes Kriteriums der Apriorität, welches Russell als wertlos bezeichnet. Endlich ist es ihm aus empirischen Gründen missglückt, die gewaltigen Unterschiede zu erklären, die zwischen der Mathematik und den andern empirischen Wissenschaften bestehen, die keiner besser und klarer auseinandergesetzt hat, als er selbst. Nichtsdestoweniger muss man sagen, dass kein anderer Verteidiger der empirischen Ansicht, ausser Russell, den rationalistischen Forderungen gegenüber so gerecht gewesen ist, kein anderer sie so gut verstanden und zu würdigen gewusst hat, oder eine so gründliche Kenntnis von Kants Standpunkt hatte wie Erdmann; kurz, kein anderer hatte beide Seiten der Frage so gut verstanden, sowohl von mathematischen wie von philosophischen Gesichtspunkten aus. Wenn es ihm nun nicht geglückt ist, das zu beweisen, was er so geschickt zu beweisen versuchte, so muss der Grund hierfür wohl darin zu suchen sein, dass der Beweis von vornherein unmöglich war.

§ 4. Russell.

Wir haben nun die Ansichten des Mathematikers Russell zu besprechen, auf dessen Buch „The Foundations of Geometry“ wir bei der Besprechung von Erdmann so oft zu verweisen Gelegenheit gehabt haben. Seine Auffassung der Metageometrie, haben wir gesehen (oben S. 113), ist der von Liebmann und Medicus darin ähnlich, dass er Logik, Analysis und die Axiome, die Euklid und der Metageometrie gemeinsam sind, als Bedingungen a priori jeder Form der äusseren Anschauung ansieht. Die Axiome von den Parallelen und den Dimensionen, die unseren Raum von andern möglichen Räumen unterscheiden, sieht er als empirisch an. Zugleich verwirft er aus philosophischen

Gründen, wie wir oben gesehen haben, die Möglichkeit eines variablen Krümmungsmasses. Daher werden die möglichen Arten des Raumes oder Formen der äusseren Anschauung bei ihm auf drei beschränkt.

Indem Russell so die Mehrzahl der empirischen Ansichten von Helmholtz und Erdmann verwirft und eine modifizierte Form des Kantianismus annimmt, nämlich, dass der Raum durchaus eine Form der Anschauung ist, sieht er sich veranlasst, eine gründliche Kritik ihrer Ansichten vorzunehmen und ein genügenderes Kriterium der Apriorität zu suchen. Er tadelt, wie wir gesehen haben, scharf Erdmanns Kriterien, besonders das eine, das behauptet, was auf die Erfahrung anwendbar wäre, müsste auch aus der Erfahrung abgeleitet werden. Nichtsdestoweniger meint er, eine modifizierte Form des einen von Erdmanns Kriterien würde genügend sein. Wenn Erdmann argumentiert, dass, wenn unsere Anschauung eine angeborene wäre, wie Kant annahm, wir niemals einen pseudosphärischen Raum vorstellen könnten (Axiome der Geometrie, S. 91), nimmt er dem Wesen nach an, dass das a priori ist, was keine Erfahrung ändern könnte. Nun meint Russell (Foundations of Geometry, S. 90), dies Kriterium würde richtig sein,[1]) wenn darin statt „was keine Erfahrung ändern könnte", gesetzt würde, „ohne welches Erfahrung unmöglich werden würde", d. h. was eine notwendige Bedingung für die Erfahrung ist.

Es wird nun unsere Aufgabe sein, dies Kriterium zu prüfen. Es klingt kantisch, aber, wie wir bald sehen werden, ist es entschieden antikantisch durch die weite Ausdehnung, die dem Ausdruck Erfahrung gegeben ist. Die Bedingungen unserer Erfahrung sind nach Kant in unseren

---

1) Ähnlich Medicus (Dissertation S. 4), Die Bedingungen der Erfahrung sind schlechthin notwendig und allgemeingültig, — „weil ohne sie keine Erfahrung möglich wäre, weil mit Aufhebung solcher Notwendigkeit die Erfahrbarkeit der Welt selbst aufgehoben wäre". Vgl. auch Riehl's „Begriff der Erfahrung", Phil. Krit. I, S. 30.

Anschauungen des Raumes und der Zeit zu suchen, einschliesslich der Arithmetik. Was diesen widerspricht, kann nicht von uns erfahren werden, wenigstens nicht bei unserer gegenwärtigen geistigen Organisation. Aber Russell, im Verein mit den Metageometern, meint, dass ein Teil dieser geistigen Organisation, nämlich unsere Raumanschauung, nicht notwendig ist, sondern nur tatsächlich, dass sie daher verschieden gewesen sein kann, aber nur in gewissen Weisen. Nun wünscht Russell zu entdecken, welches die Bedingungen sind, die diese anderen möglichen Weisen bestimmen, d. h. er wünscht zu entdecken nicht die Bedingungen unserer Erfahrung, wie sie durch unsere gegenwärtige Organisation bestimmt sind, sondern die Bedingungen, die die verschiedenen Formen bestimmen, die diese Organisation gehabt haben könnte. Er sucht daher zu unterscheiden, welche von den Bedingungen unserer Erfahrung im absoluten Sinne notwendig sind, d. h. welchen von ihnen alle andern möglichen Wesen unterliegen,[1]) und welche von ihnen blos tatsächlich oder zufällig, d. h. uns selbst eigentümlich sind.[2])

In diesem Hinausgehen nun über unsere Erfahrung, in diesem Streben, die Bedingungen zu entdecken, die die Erfahrung aller möglichen Wesen regeln, d. h. die absoluten Bedingungen der Erfahrung überhaupt, ist Russells Kriterium antikantisch und fehlerhaft.[3]) Es ist ein Unterschied, ob man mit Kant sagt, dass die Form unserer An-

---

1) Es ist natürlich dasselbe, ob wir sprechen von den verschiedenen Formen, die unsere Anschauung gehabt haben könnte, oder von den verschiedenen Formen, die andere Geschöpfe haben könnten. Der letztere Ausdruck ist jedoch etwas bequemer. Über die Möglichkeit oder Tatsächlichkeit solcher fingierten Geschöpfe ist natürlich keine Annahme gemacht.

2) Diesen Unterschied zwischen „Tatsächlichkeit" und „Notwendigkeit" haben wir bereits oben gesehen bei Helmholtz' erstem Vortrag „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie", S. 67. Sie ist besonders von Liebmann in seiner „Raumcharakteristik und Raumdeduktion" 1877 und von Medicus, Dissert., S. 14—16, hervorgehoben.

3) So spricht Medicus von „Erfahrung in ihrem allgemeinsten Begriffe" und von „Erfahrung überhaupt", a. a. O., S. 3.

schauung verschieden sein könnte von dem, was sie ist, oder ob man sagt, dass sie nur in den und den Beziehungen verschieden sein kann. Denn in letzterem Fall legen wir der Erfahrung absolute Bedingungsn bei und behaupten, dass wir diese wissen können. Insofern die Metageometrie dies behauptet, ist sie eine metaphysische Theorie.[1])

Noch mehr ist dies ersichtlich, wenn wir fragen: welches sind diese absoluten Bedingungen, die die Erfahrung keines Geschöpfes, welches es auch sei, verletzen könnte. Der Metamathematiker antwortet: Die Logik und die Arithmetik.[2]) Wie wir auch anders konstruiert sein könnten, unsere Logik

---

1) „Metakosmisch" nennt sie Liebmann.

2) Die meisten Metageometer jedoch, die die Arithmetik und Analysis überhaupt nur als Zweige der Logik ansehen, werden antworten: Die Logik allein. Nach ihnen gibt also die Logik allein wahre Notwendigkeit, der Satz des Widerspruchs ist das einzige Kriterium der objektiven Wahrheit. Da ich mit Poincaré übereinstimme, dass die Arithmetik nicht aus dem Satz des Widerspruchs allein entspringt, sondern selbst eine besondere Art der Anschauung ist, wird es für mich notwendig, sie neben der Logik als eine der absoluten Bedingungen der Erfahrung nach den Ansichten der Metageometer zu erwähnen.

Medicus, wenn er, mit Riehl (Phil. Krit., I, S. 298), behauptet, dass die „Bedingungen der Erfahrung überhaupt" nur „logisch erkannt" werden können (S. 5), ist schon von Kant abgewichen und hat den metageometrischen Standpunkt angenommen. Riehl hat einige von den Konsequenzen dieses Standpunktes vermieden, indem er, wie er meint, aus ebenfalls logischen Gründen zeigt, dass der Raum notwendig eben sein muss (Phil. Krit., II, S. 178). Es ist aber gerade die entscheidende Frage, ob dieser Standpunkt berechtigt ist oder nicht, ob die Bedingungen der Erfahrung in der Anschauung zu finden sind, wie Kant behauptet, oder, wie die Metageometer behaupten, in den logischen Funktionen des Geistes. Es ist die letztere, von Kant abweichende Ansicht, die allein die „Metakosmische (ontologische) Wendung" des a priori möglich macht, die Liebmann bei Kant zu erblicken glaubt, die jedoch nur in seiner Auffassung von Kant steckt. Es gibt wenige Dinge, auf die Kant mehr Nachdruck legte, als die Unmöglichkeit, über die Anschauungsformen anderer Geschöpfe etwas zu wissen. Dieser Standpunkt also, dass die Bedingungen der Erfahrung logischer, nicht intuitiver Natur sind, ist daher schon der metageometrische Standpunkt, welcher erst zu begründen ist.

und Arithmetik müssen feststehen. Was unserer Anschauung widerspricht, obwohl für uns unvorstellbar, kann doch ein denkbares, daher ein mögliches Objekt sein. Die blosse Tatsache, dass ein Objekt für uns unvorstellbar ist, beweist daher noch nicht, dass es an sich unmöglich ist; sie beweist nur, dass es unverträglich ist mit der Organisation dieses Vermögens bei uns. Aber es könnte Geschöpfe geben, die eine von der unsrigen verschiedene Form der Anschauung haben, in der es ein mögliches Objekt der Erfahrung sein würde. Wir sind daher nicht berechtigt, aus der blossen Unvorstellbarkeit eines Objektes für uns auf seine Unmöglichkeit überhaupt zu schliessen. Was dagegen der Logik und Arithmetik widerspricht, das ist überhaupt unmöglich, denn es ist sich selbst widersprechend, also undenkbar. Solches Objekt kann in der Erfahrung keines Geschöpfes existieren, da es nicht einmal in seinem Denken existieren kann.[1])

Aber wie weiss der Metamathematiker, dass die Logik und Arithmetik aller anderen Geschöpfe dieselbe sein muss, wie unsere? Nur weil er das Gedankenexperiment macht, sie zu verneinen, und findet, dass unter diesen Umständen alles für ihn verschwindet, dass sie daher für sein Denken und sein Wissen absolut notwendig sind. Aber dieselben Argumente können mit Recht hier angewandt werden, die

1) Medicus (Dissert. S. 12) behauptet, dass der Begriff „möglich" von den Metageometern nicht in dem von Kant verworfenen Wolf'schen Sinne gebraucht wird: es handle sich nicht um „reale Möglichkeit", sondern nur um „logische Möglichkeit". Die metageometrischen Räume sind nur logisch und mathematisch berechtigte (d. h. widerspruchslose) Begriffe und „ein mathematisch berechtigter Begriff darf nicht von Philosophen hypostasiert werden" (S. 13.) Diese Begriffe dienen nur zum richtigen (mathematischen und logischen) Verständnis unseres eigenen Raumes dadurch, dass sie uns befähigen, seinen richtigen Platz unter den logisch und mathematisch möglichen Räumen zu finden. Leider sind es aber nicht die Philosophen, sondern gerade die Mathematiker und Medicus selbst in dem nächsten Satze, die diese Hypostasierung begehen. Denn Medicus sagt: Seitdem die Möglichkeit anderer Räume als des euklidischen erkannt wurde, entstand die Frage, wie weiss man,

bei dem Anschauungsexperiment angewandt wurden. Solch ein Gedankenexperiment, kann man sagen, beweist nur, dass Objekte, die unserer Logik und Arithmetik widersprechen, für uns unmöglich sind, nicht, dass sie überhaupt unmöglich sind. Es beweist nur, dass sie unverträglich sind mit der Organisation unseres Denkvermögens, keineswegs aber, dass dies Denkvermögen nicht verändert werden könnte. Im Gegenteil, es ist kein Grund vorhanden, der dafür angegeben werden kann, warum keine andern Geschöpfe existieren könnten, die ein verschieden organisiertes Denkvermögen haben, wodurch das, was für uns undenkbar ist, für sie denkbar sein würde. Daher kann ich keine Gründe sehen, warum nicht dieselben Schlüsse wie bei der Anschauung auch beim Denken gezogen werden sollten. Zwar kann ein Objekt, das für uns unvorstellbar ist, noch denkbar sein, während eins, das undenkbar ist, von uns in keiner Weise aufgefasst werden kann, da wir keine höhere geistige Fähigkeit haben, die zum Denken in demselben Verhältnis steht, wie das Denken zur Anschauung, und wodurch das, was undenkbar ist, noch in irgendwelcher Weise aufgefasst und seine Möglichkeit eingesehen werden kann. Aber dass wir kein solches Vermögen besitzen, ist noch kein Beweis, dass ein solches Vermögen nicht existieren

---

dass der Anschauungsraum nicht einer von diesen ist? und er klagt darüber, dass keine genügende Antwort auf diese Frage von den Gegnern der Metageometrie gegeben worden ist. Aber schon bei der Aufstellung der Frage, ob die Anschauungsform einer der anderen logisch möglichen entsprechen könnte, werden diese als reale Möglichkeiten behandelt. Sie werden nicht mehr als blos widerspruchslose Gedankensysteme betrachtet, sondern als Dinge, die einer Verwirklichung fähig sind; denn die Form der Anschauung ist nicht, wie Medicus sie nennt, eine reale Möglichkeit, sondern eine Tatsächlichkeit. Sie ist zwar nicht ein materielles Ding, aber nichtsdestoweniger ist sie etwas für uns wirklich Bestehendes, etwas, das für uns wirklich ist, nicht nur etwas, was sein kann. Indem die andern von den Metamathematikern als möglich aufgestellten Anschauungsformen in dieser Weise wirklich sein könnten, so sind sie doch als reale und nicht als rein logische Möglichkeiten angesehen.

könnte. Diesen Schluss ziehen, heisst unsere eigenen menschlichen Beschränkungen dem Absoluten auferlegen, d. h. ebensowenig wie wir etwas Widersprechendes denken können, könnte Gott etwas Widersprechendes schaffen. Das heisst aber den Satz des Widerspruchs zu einer höheren Macht zu machen als Gott selbst; heisst ihn denselben Beschränkungen unterwerfen, die uns auferlegt sind, Ihn zu einem grossen Mann zu machen. Es wäre in der Tat seltsam, würde der Schöpfer denselben Bedingungen unterworfen sein, wie seine Schöpfung. Aber woher diese höhere Macht, der sich Geschöpf und Schöpfer beugen müssen? Wäre nicht das dann der wahre Gott? Sollen wir dann den Satz des Widerspruchs zu unserm Gott machen?

Es ist klar, der Mathematiker hat hier einfach den alten ontologischen Irrtum begangen, anzunehmen, dass das Denken das Sein erfassen kann, dass die Sinne daher nur auf den Schein beschränkt sind. Es ist nur die letzte Konsequenz der heutzutage so vorherrschenden Ansicht, dass man durch die Mathematik näher an das Wesen der Dinge kommt, dass die Erscheinungen wahrer und wesentlicher mathematisch sind, als irgend etwas anderes, dass man also durch die Mathematik zu einer Art absoluten Wissens kommt. Es ist schon oben (S. 136) darauf hingewiesen, dass es einer der ernstlichen Irrtümer des mathematischen Empirismus ist, dass Kenntnis nur dann wirklich ist, wenn sie absolut ist. Nun ist diese Ansicht eine direkte Folge der Ausschliessung der apriorischen Begriffe. Relativ und absolut sind korrelative Begriffe. Das Relative wird als relativ erkannt nur in Bezug auf den Begriff des Absoluten. Wenn wir nun das Apriorische fallen lassen, so sind wir nicht mehr imstande, das Relative vom Absoluten zu unterscheiden. Wir verwechseln sie, wir nehmen das Relative für das Absolute. Aus diesem Grunde verfällt diese Form des Empirismus, trotz ihrer Bemühungen, sich auf das unmittelbar Gegebene zu beschränken, unvermeidlich in Absolutismus.

Die ursprüngliche Unterscheidung des Mathematikers zwischen einem Teil unserer geistigen Organisation, der notwendig ist, und einem Teil, der tatsächlich ist, ist ganz unhaltbar. Wenn ein Teil der Organisation notwendig ist, dann kann er es nur im absoluten Sinne sein. Was wissen wir aber von der Notwendigkeit, getrennt von dem, was durch unsere Organisation gegeben wird? Eine absolute Notwendigkeit gibt es nicht für uns. Es ist sinnlos, von etwas zu sprechen, was im absoluten Sinne möglich oder unmöglich ist. Im absoluten Sinn muss zunächst Alles als gleichmöglich angesehen werden, selbst das, was für uns widersprechend ist. Es ist unmöglich, dem Absoluten Bedingungen aufzuerlegen, denn das Absolute ist eben das Unbedingte. Die Ausdrücke möglich und unmöglich selbst haben keine Anwendung mehr, da die einzige Möglichkeit, die wir kennen können, die ist, zu wissen, was unter gegebenen Bedingungen möglich ist. Kroman hat Recht, wenn er sagt, dass: „Jede Notwendigkeit eine bedingte ist, ... dass sie unvermeidlich an etwas Vorausgesetztes oder Gegebenes geknüpft ist. Keine Notwendigkeit schwebt also selbstverständlich in der Luft.“ „Nicht einmal der Satz $2 + 2 = 4$ ist unbedingt notwendig,“ sagt er.[1]) Eine Welt, die unserer Arithmetik widerspricht, ist daher ebensowenig als an sich unmöglich anzusehen, wie eine, die unserer Geometrie widerspricht. Obwohl wir daher mit Kant zugeben müssen, dass die Form unserer Anschauung nicht notwendig ist in diesem absoluten Sinne, so müssen wir auch mit ihm zugeben, dass wir keine mögliche Kenntnis davon haben können, wie sie anders hätte sein können,[2]) da wir ihr nicht absolute Bedingungen auferlegen können, die jedenfalls ihre möglichen Variationen beschränken würden. Noch weniger können wir von ihr Übereinstimmung mit unserer Logik und Arithmetik fordern, als eine dieser Bedingungen. Wir können diese ebenso-

1) „Unsere Naturerkenntnis“, S. 165.

2) Vgl. Lotze, „Metaphysik“, Bd. II, Kap. 1, 1879.

wenig als absolut notwendig ansehen, wie unsere Geometrie; wir müssen dieselbe Möglichkeit der Variation bei ihnen zugeben, wie bei der Geometrie. Kurz, es ist nicht wahr, dass ein Teil unserer geistigen Organisation als notwendig anzusehen ist, sondern sie ist insgesamt als tatsächlich zu betrachten. Hinter diese Tatsächlichkeit können wir nicht kommen. Wir können nicht sagen, ob eine Notwendigkeit dahinter steht oder nicht.

Indem nun der Mathematiker annimmt, dass Logik und Arithmetik feststehen müssen, so lautet seine Frage: Was für andere Formen der Anschauung sind mit diesen verträglich? Nun wird schon gegen die Annahme einer völligen Unabhängigkeit der Logik und Arithmetik von der Anschauungsform von einigen Philosophen Einspruch erhoben. Kroman z. B., der in Gemeinschaft mit Kirschmann[1]) den Unterschied zwischen Anschauung und Denken aufhebt, und darauf besteht, dass jede Denknotwendigkeit auf einer Anschauungsnotwendigkeit beruht,[2]) meint, dass Helmholtz' Flächenwesen, die auf einer Kugel wohnen, wo die Gerade in sich selbst zurücklaufend ist, eine von der unsrigen verschiedene Arithmetik haben würden. Sie könnten geneigt sein $+100 = -100$ zu setzen, wie wir $+\infty = -\infty$ setzen.[3]) Auch muss bemerkt werden, dass, weil unsere Anschauungsform mit unserer Logik und Arithmetik verträglich ist, keineswegs daraus folgt, dass dies überhaupt der Fall sein muss. Es ist sogar denkbar, dass es Geschöpfe geben könnte, deren Anschauungsformen mit ihrer Logik und ihrer Arithmetik nicht übereinstimmen. In der Tat wissen wir durchaus nichts von den Beziehungen, die zwischen der Logik und den Anschauungsformen anderer Geschöpfe bestehen oder nicht bestehen mögen, da wir

1) „Dimensionen des Raumes", S. 364. Kroman, S. 13–15. Schotten, „Grenze zw. Phil. u. Math.", Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw., S. 56, 1896, Nr. 4.

2) a. a. O., S. 153.

3) a. a. O., S. 156.

überhaupt nichts von ihnen wissen können. Alle solche Spekulationen sind daher müssig. Obwohl wir die von dem Metamathematiker behaupteten Möglichkeiten nicht leugnen können, so ist es nutzlos, sie zu erörtern oder auf andere hinzuweisen auf einem Gebiet, wo, nach Allem, was wir wissen können, schlechthin Alles möglich ist, oder vielmehr, wo zwischen dem Möglichen und dem Unmöglichen nicht mehr unterschieden werden kann.

Indem Russell nun die Behauptung der Metageometer annimmt, dass Logik und Arithmetik unbedingt notwendig sind, geht er in ganz allgemeiner Weise vor, die weiteren Bedingungen der Erfahrung überhaupt zu entdecken. Zu allererst will er beweisen, was vorher von den Metamathematikern ohne weiteres angenommen war, dass „some form of externality" (a. a. O., S. 57) erforderlich ist; Logik und Arithmetik allein, meint er, genüge nicht, eine Erfahrung möglich zu machen. Unsere Erfahrung ist von „interrelated diversity", und diese kann nicht durch die Logik allein gegeben werden. Ein „Principle of Differentiation" ist notwendig (S. 136).[1] Dies kann nun nur gegeben werden durch eine Form der Äusserlichkeit, ähnlich, doch nicht notwendig identisch mit unserer Raumanschauung. Russell geht sogar so weit, zu beweisen, dass dies „Principle of Differentiation" wenigstens zwei Dimensionen haben muss, um seinen Zweck angemessen zu erfüllen (S. 141, 142).

Man kann schon hier mit Recht innehalten und fragen, mit welchem Recht Russell schliesst, dass, weil unsere Erfahrung als eine von „interrelated diversity" charakterisiert werden kann, diese die einzige Art Erfahrung ist, die überhaupt möglich ist, oder dass, weil es die Hauptfunktion unserer Raumanschauung zu sein scheint, diese Verschiedenheit zu differenzieren, dies überhaupt die Hauptaufgabe jeder Form der Anschauung ist. Bei alledem ist klar, dass Russell nur das herausgreift, was ihm die fundamentaleren Eigenschaften unserer Anschauung zu sein

1) Vgl. Medicus, Dissert.

scheinen, und ihnen absolute Geltung gibt. Doch scheint es ihm gänzlich unbewusst zu sein, dass er dadurch eine ontologische Theorie aufstellt.

Nachdem er dann festgestellt hat, dass eine gewisse Form der Äusserlichkeit, die wenigstens zwei Dimensionen hat, für die Erfahrung überhaupt notwendig ist, nimmt Russell in Gemeinschaft mit den Metamathematikern an, dass eine solche Anschauungsform auch mit unserer Logik und Arithmetik übereinstimmen muss, d. h. dass ihre Geometrie eine der analytisch möglichen sein muss. Doch Russell geht noch weiter und behauptet, dass eine Form der Äusserlichkeit nicht nur analytisch möglich, sondern dass sie wie unser Raum qualitativ homogen und die Lage in ihr relativ sein muss. Dies reduziert die Anzahl der möglichen Typen solcher Formen von ∞ auf drei. Wie vorher, können wir sagen: so notwendig und wesentlich die oben erwähnten Eigenschaften in unserer Anschauungsform zu sein scheinen mögen, so folgt keineswegs, dass sie aus diesem Grunde in absolutem Sinne notwendig sind. Russell hätte ebenso gut weiter gehen und beweisen können, dass auch die Relativität der Grösse notwendig ist, woraus sich ergeben haben würde, dass nur eine Form der Anschauung, nämlich die euklidische, überhaupt möglich ist (vgl. oben S. 118). In der Tat glaubt Russell, dass die Relativität der Grösse notwendig ist, nur meint er, dass die nichteuklidischen Geometrien dies Prinzip nicht verletzen. Obwohl sein Versuch, diese Behauptung zu beweisen, höchst geistreich und scharfsinnig ist, muss ich doch Natorp recht geben, dass er nicht geglückt ist.[1]) Es liegt in der Tat kein triftiger Grund bei Russells Prinzip vor, warum irgend welche der Merkmale unserer euklidischen Anschauungsweise für etwas weniger wesentlich als andere gehalten werden sollten, warum sie nicht alle als gleich

1) Natorp, „Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik", Arch. f. system. Philos., VII, Art. III, S. 380, 1900.

notwendig und gültig im absoluten Sinne angesehen werden sollten. Wir würden dann zu schliessen haben, dass unser euklidischer Raum absolut notwendig ist in jeder Einzelheit, dass wir also nicht im geringsten anders hätten geschaffen werden können, als wir es sind. Diese Behauptung erscheint ohne weiteres als absurd.

Dieser Schluss jedoch, zu dem wir endlich geführt werden, wenn wir den von Russell verfolgten Denkprozess bis zu seinen letzten Konsequenzen treiben, einen Prozess, der selbst nur eine Fortsetzung des von den Metamathematikern angenommenen ist, ist derselbe Schluss, von dem die Metamathematiker bei ihrem Widerspruch ausgingen und den sie fälschlich als Kants Ansicht hinstellten. Sie freuten sich über die endliche Entdeckung der Metageometrie, dass Euklid nicht absolut notwendig ist, wie Kant behauptet hatte (?), sondern dass andere Räume gleich möglich sind, eine Entdeckung, die sie endlich aus den Fesseln des Absolutismus befreite, mit denen sie vorher gebunden waren. Wohl mögen sie sich gefreut haben, aber es war nicht Kants, sondern nur ihr eigener unberechtigter Absolutismus, den sie überwunden hatten, und dies haben sie leider nur teilweise getan. Denn indem sie leugneten, dass Euklid notwendig ist, nahmen sie stillschweigend an, dass etwas Anderes notwendig sei, und bemühten sich eifrig, dies Andere zu entdecken. So suchte Bolyai die wahre absolute Raumwissenschaft, die die Stelle des diskreditierten Euklid einnehmen sollte. Lobatschefsky suchte jene höhere und allgemeinere Geometrie, die Euklid als einen Spezialfall umfassen sollte. Erst ganz allmählich wurde der uralte Absolutismus, in dem die Mathematiker bis auf diese Zeit befangen gewesen waren, gebrochen. Zuerst wurde nur die absolute Notwendigkeit des Parallelenpostulats angezweifelt. Aber nachdem der empirische Keil erst an diesem Punkt eingetrieben war, breitete sich der Empirismus schliesslich auf alle andern Axiome aus. Bei Helmholtz und Erdmann haben wir den alten Absolutismus

auf ein Minimum beschränkt; bei ihnen ist nur Logik und Arithmetik absolut notwendig. Dann begann die Reaktion. So versucht Russell zu zeigen, dass es noch andere Dinge gibt, die, wie er meint, so fundamental sind, dass sie auch als ebenso notwendig angesehen werden sollten, wie Logik und Arithmetik. Aber wenn diese zugelassen werden, dann können wir schwerlich gewissen weiteren Dingen unsere Zustimmung versagen u. s. w. Wir werden so schliesslich zu der Einsicht verführt, dass wir tatsächlich nichts von der Kategorie der Notwendigkeit ausschliessen können, dass wir allenthalben kein anderes Prinzip bei der Entscheidung der Sache gehabt haben, als unsere eigene subjektive Überzeugung. Und der Prozess, den wir verfolgt haben, bringt uns schliesslich zu demselben Absolutismus zurück, den umzustürzen unsere ursprüngliche Absicht war. Der Fehler war, dass wir diesen absolutistischen Standpunkt niemals wirklich aufgegeben, sondern nur zurückgeschoben haben. Nicht weniger entschieden leugnet die Metageometrie die absolute Notwendigkeit jeder besonderen Raumform, als sie die absolute Apriorität des Gattungsbegriffs, der sie alle einschliessen soll, und der Bestimmungen oder der geistigen Funktionen, durch die sie gefunden werden, die ihnen allen gemeinsam sind, behauptet. Der absolutistische Standpunkt steckt also immer dahinter.

Ich kann keinen anderen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten sehen, als dass man diesen absolutistischen Standpunkt gänzlich aufgibt und zugibt, dass unsere Logik und Arithmetik nicht notwendiger sind, als unsere Geometrie, dass jedes Prinzip hier fehlt, nach welchem Grade der Notwendigkeit unterschieden oder bestimmt werden können, dass die hier vorausgesetzte absolute Notwendigkeit für uns garnicht existiert, dass die alleinige Notwendigkeit, die wir kennen können, das ist, was durch unsere eigene geistige Organisation gegeben ist und was nur auf unsere eigene Erfahrung Anwendung

findet. Zu bestimmen, wie diese Organisation hätte anders sein können, liegt gänzlich ausser unserer Macht. „Wir können . . . . alle Anschauung nur durch die unsrige anschauen,“ sagt Kant.[1]) Es ist für uns daher ganz unmöglich, aus unsern eigenen Anschauungen herauszukommen und Bedingungen zu entdecken, die von ihnen unabhängig sind. Sobald wir versuchen, es zu tun, fallen wir unvermeidlich in das metaphysische Vacuum, vor dem uns Kant warnte, wo all unsere Kräfte schwinden, und wo alles Denken völlig inhalts- und bedeutungslos wird.

Es ist daher das Fallenlassen dieser Beschränkung auf unsere Erfahrung der Hauptmangel des von Russell und Medicus vertretenen Kriteriums der Apriorität und macht allein seine ontologische oder „metakosmische“ Wendung möglich. Das Fallenlassen dieser Beschränkung kann in der Tat nur von dem Wunsche eingegeben sein, für die Metageometrie Platz zu schaffen, denn es gibt nur wenige Dinge, auf die Kant häufiger und nachdrücklicher Gewicht legte.

Nichtsdestoweniger glaubt Russell sogar in Kant eine Stütze für seine Ansichten zu finden. Die ersten beiden Argumente in der transscendentalen Ästhetik für die Apriorität des Raumes, meint er, beweisen nicht die apriorische Notwendigkeit des euklidischen Raumes, sondern nur die von „some form of externality“ (S. 57).[2]) Möglicherweise könnte dies von dem ersten Argument gesagt werden, ich glaube aber schwerlich von dem zweiten. Kants erstes Argument lautet:[3]) „Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äusseren Erfahrungen abgezogen worden. Denn damit gewisse Empfindungen auf etwas ausser mich

1) Brief an Herz 1789. Kant's Werke, Hartenstein, Bd. VIII, S. 717. Zitiert von Erdmann, S. 116.

1) Ähnlich sagt Medicus, Diss. S. 6, dass Kants Argumente nur die Apriorität des Gattungsbegriffs des Raumes beweisen, nicht die des spezifischen euklidischen Raumes.

2) „Kritik der reinen Vernunft“. Ausg. Kehrbach, S. 51. Alle Zitate im Text beziehen sich auf diese Ausgabe.

bezogen werden, ... impleichen damit ich sie als ausser (und neben) einander, mithin nicht bloss verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muss die Vorstellung des Raumes schon zu Grunde liegen." Sicherlich scheint dies Argument nicht zu beweisen, dass der Raum drei Dimensionen haben, oder dass das Parallelenpostulat Gültigkeit haben muss. Aber es ist auch bezweifelt, ob dies Argument wirklich überhaupt etwas vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus beweist, ob es nicht vielmehr nur eine Angabe der psychologischen Tatsache ist, dass unsere Wahrnehmungen uns schon räumlich geordnet gegeben werden.

Anders ist es, denke ich, mit dem zweiten Argument. Dies, das bekannteste und am häufigsten von Kants fünf Argumenten zitierte, lautet: „Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äusseren Anschauungen zu Grunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen und nicht als eine von ihnen abhängige Bestimmung angesehen. . . ." Der hier gemeinte Raum ist offenbar der Raum unserer Anschauung, der euklidische, dreidimensionale Raum, da dieser Raum es ist, ohne den wir nicht auskommen können, wenn wir überhaupt Objekte uns vorstellen wollen, und der daher als die notwendige Bedingung der Vorstellbarkeit und daher der Erfahrbarkeit von Gegenständen für uns erscheint. Denn Gegenstände, die nicht der euklidischen Geometrie entsprechen, sind für uns ebenso unvorstellbar und unerfahrbar, wie Gegenstände, die überhaupt nicht in unsern Raum und unserer Zeit erscheinen, wie durch die Unvorstellbarkeit der nichteuklidischen Geometrie dargetan wird.[1])

[1]) Stallo hält dies Argument für hinfällig, da wir in der Vorstellung den Raum nicht gänzlich von seinem empirischen Inhalt loslösen können. Eine schwache Empfindung von Farbe, oder ein Gefühl von

Dies Argument Kants ist im wesentlichen eine direkte Berufung auf die Anschauung. Wenn wir das Anschauungsexperiment machen, und andere Raumverhältnisse als die euklidischen vorzustellen versuchen, überzeugen wir uns bald von der gänzlichen Unmöglichkeit davon und daher von der Unentbehrlichkeit der euklidischen Beziehungen für die Vorstellbarkeit und die Erfahrbarkeit der Gegenstände für uns, aber freilich nur für uns. Das Argument beweist durchaus nichts über die Notwendigkeit dieses Raumes, im absoluten Sinne. Dies ist nur eine Auffassung, die die Metamathematiker, und freilich auch andere, davon gebildet haben, aber ich meine mit Unrecht. Ich glaube nicht, dass Kant es beabsichtigte. Auch beweist das Argument nicht, dass irgend ein Teil unserer euklidischen Anschauung, ein scheinbar elementarerer oder fundamentalerer Teil, wie z. B. ihre blosse Räumlichkeit oder blosse Äusserlichkeit, wie

---

Druck, sagt er, muss unvermeidlich bleiben, wenn wir ein geistiges Bild des absolut leeren Raumes bilden wollen. (Concepts and Theories of Modern Physics, S. 233.) Diese Tatsache ist wirklich auch von vielen anderen Autoren erwähnt, besonders von Sir W. Hamilton (Lectures on Metaphysics. Lecture XXII, 1860—61), ferner von Stumpf (Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung, S. 19, 1873), die von Stallo selbst erwähnt werden, und auch von Riehl (Phil. Krit., Bd. IV, S. 263, 1876, Bd. II, S. 101—103, 1879), Sigwart (Logik, Bd. II, S. 59, 1878), Lotze (Metaphysik, S. 199, 1879), Wundt (Logik, Bd. I, S. 503, 1880), Russell (a. a. O., S. 61, 1897). Die Behauptung ermangelt also nicht der Autorität. Es ist unzweifelhaft richtig, dass wir nicht ein geistiges Bild von irgend etwas uns bilden können ohne empirischen Inhalt, und dass wir daher kein wahres geistiges Bild von dem leeren Raume uns bilden können. Aber wir können einen Begriff davon bilden. Wir können wissen, was wir unter einem leeren Raum verstehen, und in der Tat sind wir nur vermöge dieses Begriffs imstande einzusehen, dass kein geistiges Bild, das wir bilden können, ihm entspricht, oder den Grad der Annäherung zu beurteilen, den wir in der Vorstellung erreichen können. Kants Argument, denke ich, läuft nur auf die Behauptung hinaus, dass Gefülltsein nicht zu dem Begriff Raum gehört, während Ausgedehntsein zu dem Begriff Körper gehört. Daher ist Raum der ursprünglichere Begriff und wird in dem Begriff Körper vorausgesetzt.

Russell anzunehmen scheint, absolut notwendig sei. Die Kritik hat durchaus nichts mit der absoluten Notwendigkeit zu tun. Ihr Zweck ist nur, die unentbehrlichen Postulate unseres Denkens und unserer Erfahrung nachzuweisen, d. h. diejenigen Grundsätze, die nicht verneint werden können, ohne unser systematisches Denken oder unsere Erfahrung aufzuheben. Daher muss ich auch diese partielle absolute Wendung verwerfen, die Russell Kants Argumenten gibt. Ich kann nicht zugeben, dass sie beweisen, dass „some form of externality" denkender Wesen überhaupt notwendig sei, ohne Rücksicht darauf, ob sie menschlich sind oder nicht.[1])

Wenn wir nun Russells Kriterium auf unsere Erfahrung beschränken, wird es identisch mit dem Kants, d. h. nur diejenigen Grundsätze sind notwendig und daher a priori, deren Verneinung unser systematisches Denken oder unsere Erfahrung aufheben würde. Und das einzige wirksame Mittel, solche Grundsätze zu beweisen, ist das Gedankenexperiment, sie zu verneinen. Dies ist das Kriterium, das hier angenommen und angewandt werden soll. Es ist klar, dass die durch diese Methode erkannte Notwendigkeit nur eine relative, nicht eine absolute ist, eine, die nur für uns gültig ist. Und nur die subjektiven Bedingungen der Erfahrung können auf diese Weise als notwendig für uns anerkannt werden.

---

1) Kants übrige Argumente übergeht Russell, da sie nur den Zweck haben, zu zeigen, dass der Raum Anschauung ist und nicht Begriff. Obwohl dies die allgemein angenommene Auffassung ist und auf guter Autorität beruht und viele veranlasst hat, im Gegenteil zu zeigen, dass der euklidische Raum nicht Anschauung, sondern Begriff ist (Wundt, Riehl, Stallo, James, Russell u. s. w.), muss ich doch annehmen, dass sie nicht ganz richtig ist. Kant spricht überall vom Raum als einem Begriff, so dass diese Bezeichnungsweise seinen Ansichten nicht so ganz entgegengesetzt sein kann. Die in Frage kommenden Argumente scheinen mehr beweisen zu sollen, dass der Raum kein diskursiver, aus der Erfahrung abstrahierter, sondern auf reine Anschauung gegründeter Begriff ist, zu dem man unabhängig von der Erfahrung gekommen ist, als dass er überhaupt nicht Begriff ist. Sie setzen daher einen wichtigen Teil seines allgemeinen Arguments fest für die Unerlässlichkeit der Anschauung und für die Apriorität des Raumbegriffs.

Man muss jedoch zwischen Postulaten des Denkens und Postulaten der Erfahrung unterscheiden. Dies ist eine Unterscheidung, die nicht immer von den Metamathematikern gemacht wird, für die die Grundsätze des Denkens gewöhnlich zugleich die Grundsätze der Erfahrung sind, und der Satz des Widerspruchs das einzige Kriterium der objektiven Wahrheit ist. Darum muss ich den Unterschied zwischen diesen beiden Arten von Grundsätzen nachdrücklich hervorheben. Die Grundsätze der Erfahrung sind nach Kant in der Anschauuug zu finden und sind von denen des Denkens völlig unabhängig. Die Erfahrung scheint in der Tat eine gewisse Geringschätzung für den Satz des Widerspruchs zu haben. Wir sind es, die wir in unserm systematischen Denken die Erfahrung auf solche Weise umformen möchten, dass dem Satz des Widerspruchs genügt wird. Die Anschauung scheint im Gegenteil manchmal den Zweck zu haben, den Satz des Widerspruchs aufzuheben. Eine Form des letzteren ist: A kann nicht zugleich B und Nicht-B sein. Aber es kann es sein zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Teilen von A. Raum und Zeit scheinen daher hier den Satz des Widerspruchs in einer gewissen Weise aufzuheben. Letzerer behauptet in der Tat nur die Unvereinbarkeit des Widersprechenden; aber es bleibt der Anschauung immer noch übrig, zu zeigen, welche Dinge widersprechend sind. Weiss und Nicht-Weiss sind logisch widersprechend. Die Erfahrung allein zeigt, dass grün, blau, schwarz und alle andern Farben zu den nicht-weissen gehören. Ähnlich lehrt uns unsere arithmetische Anschauung allein, dass 1, 3, 4, 5 . . . . und alle folgenden Zahlen zu den Nicht-Zwei gehören. Die Grundsätze des Denkens werden daher auf die Erfahrung oder die Anschauung angewendet, regulieren sie aber in keiner Weise. Letztere hat ihre eigenen eigentümlichen regulativen Prinzipien, die nicht im Denken, sondern in der Anschauung zu finden sind. Daher beruft sich Kant immer auf die Anschauung. Seine beständige Mahnung ist: Mache Dir das Experiment selbst, und Du wirst Dich überzeugen.

Die Anschauung ist so für ihn das einzige Zeugnis für das, was für uns die mögliche Erfahrung feststellen kann, und die Glaubwürdigkeit dieses Zeugnisses ist der Grundsatz der Kritik. Doch begeht hier nicht Kant eine petitio principii, indem er sich auf die Anschauung beruft, um die Glaubwürdigkeit der Anschauung zu beweisen? Ihre Glaubwürdigkeit muss dann von vornherein schon vorausgesetzt sein. Es wäre eine petitio principii, wenn Kant dadurch die absolute Geltung der Anschauung zu beweisen gedächte; aber da er nur ihre Unerlässlichkeit für unsere Erfahrung zu beweisen wünscht, so muss die Berufung auf sie als zulässig angesehen werden.

Es ist sicherlich klar, dass, was unserer Anschauungsform widerspricht, für uns unvorstellbar und unerfahrbar ist, wenigstens solange diese Form dieselbe bleibt. Sogar die Metamathematiker stimmen, soviel ich weiss, hier mit uns überein. Aber, könnten sie geneigt sein zu fragen, wie wissen wir, dass diese Form beharrlich ist? Wie wissen wir, dass sie sich nicht mit der Zeit ändern könnte, und so, was uns jetzt nicht vorstellbar ist, später einmal vorstellbar wäre?[1]) Wie kann die jetzige Form unserer Anschauung „legislate for all future experience"? Kant scheint in der Tat die Form der Anschauung für eine absolut feste und unveränderliche Einrichtung genommen zu haben, und insofern scheint er in unberechtigter Weise absolutistisch zu sein.

Dies scheint nun ein Punkt zu sein, an dem die metageometrischen Theorien verwertet werden könnten. Der Metamathematiker räumt der Anschauung keine so hohe Stellung ein, wie sie diese bei Kant geniesst. Bei ihm ist sie das Resultat aller vergangenen, nicht der „Legislator of all future experience". Sie entspringt, so glaubt er, einer Einwirkung der realen Welt auf uns. Daraus folgt, dass

---

1) So meint Poincaré „La science et l'hypothèse", S. 68: „Quelqu'un qui y consacrerait son existence pourrait peut-être arriver à se représenter la quatrième dimension.

eine Veränderung in der letzteren eine Veränderung in der ersteren hervorrufen könnte. Wir sind daher nicht berechtigt, aus der Natur unserer gegenwärtigen Erfahrungen zu schliessen, was die Natur aller unserer zukünftigen Erfahrung sein wird: dass das, was uns jetzt unvorstellbar ist, es immer sein wird. Durch eine Veränderung in unserem Vorstellungsvermögen selbst könnte sich der Gesichtskreis desselben in Zukunft erweitern. So sind die Farben für den Blindgeborenen unvorstellbar und unerfahrbar. Aber sollte seine Blindheit durch eine Operation geheilt werden, so würden sie vorstellbar und erfahrbar werden; der Gesichtskreis seines Vorstellungsvermögens und die Möglichkeiten seiner Erfahrung würden sich erweitern.

Nach dieser Theorie ist die Form der Anschauung der realen Welt ganz ebenso angepasst wie ein Tier seiner Umgebung; und wie letzteres, kann sie und wird sie wahrscheinlich immer etwas hinter einer vollkommenen Anpassung zurückbleiben. Wir müssen die Anschauungsform in der Tat als das Resultat unserer gröberen und gewöhnlicheren Erfahrungen annehmen. Es könnte sich sehr wohl ereignen, dass genauere wissenschaftliche Beobachtungen einen kleinen Unterschied zwischen der Form unserer Anschauung und der wirklichen Beschaffenheit der Aussenwelt zeigten. Der Glaube des gewöhnlichen Menschen an die allgemeine Gültigkeit Euklids erweist sich so als bedingt durch seine völlige Beschränkung auf die gewöhnlicheren Erfahrungen. Wir würden ein Recht haben, Euklid über diese hinaus anzuwenden, nur wenn wissenschaftliche Messungen vorausgegangen wären und den Weg durch den Beweis seiner Anwendbarkeit dafür vorbereitet hätten. Daher könnte die Gültigkeit unserer gewöhnlichen Anschauungsweise nicht ohne weiteres für alle Zeit und jeden Raum behauptet werden.

Es würde scheinen, als hätte der Metamathematiker hier ein starkes Argument, und als wäre Kant wirklich der Absolutist gewesen, dessen man ihn beschuldigt. Wie weiss Kant, dass die Anschauungsform etwas so Fest-

stehendes und Unveränderliches ist, wie er sie offenbar nimmt? Erfordert das nicht absolute Kenntnis? Allerdings, wenn Kant es in dem realistischen Sinne behauptet hätte, in dem der Mathematiker es auffasst. Letzterem ist die Anschauung durchaus etwas Nebensächliches. Sie hat nur die psychologische Funktion zu bestimmen, wie die Welt den Sinnen scheint. Wie die Welt wirklich ist, kann man nur ermitteln, wenn man die zweifelhaften Angaben unserer Sinne so viel wie möglich ausser Acht lässt und sich vollständig auf wissenschaftliche Forschungen und reine oder abstrakte Deduktionen aus diesen verlässt. Nach Kant dagegen hat die Anschauung die weit richtigere erkenntnistheoretische Funktion zu bestimmen, wie die Welt uns erscheint, und es ist für uns ganz unmöglich, dahinterzukommen und zu finden, wie sie wirklich an sich ist. Nun kann ich nicht einsehen, dass selbst nach der Kantischen Theorie die Möglichkeit einer Veränderung in der Form unserer Anschauung (im absoluten Sinne) etwa mehr ausgeschlossen ist, als es die Möglichkeit war, dass sie überhaupt anders hätte sein können, als sie ist, nur dass er, was uns jedoch hier nichts angeht, auch die Zeit subjektiv macht. Wohl aber ist die Möglichkeit ausgeschlossen, dass wir eine solche Veränderung erkennen könnten, wenn sie einträte. Denn solche Veränderung zu erkennen, würde erfordern, dass wir im stande wären, zwei Formen der Anschauung gleichzeitig zu haben und sie zu unterscheiden: denn mit der gegenwärtigen Form müssen wir die Erinnerung an die vergangene Form haben, um eine Veränderung zu bemerken. Das ist aber unmöglich. Da die Form der Anschauung in jedem Augenblick den Inbegriff aller uns vorstellbaren Beziehungen gibt, könnten wir niemals einen Teil von ihnen unterscheiden als zu einer Form gehörig, die übrigen als zu einer anderen gehörig. Alle solche angeblichen Unterscheidungen könnten nur als willkürlich angesehen werden, da eine wahre Unterscheidung absolute Erkenntnis er-

fordern würde. Wir müssen daher notwendig alle uns vorstellbaren Beziehungen in jedem Augenblick als zu ein und derselben Anschauungsform gehörig ansehen. Wir können in demselben Augenblick ebensowenig zwei Anschauungsformen kennen, wie, wie Russell zeigte (a. a. O., S. 85), zwei verschiedenartige Räume derselben Welt angehören können, eine Tatsache, die Kant selbst schon im Jahre 1747 betont in seiner Erstlingsschrift „Gedanken von der wahren Schätzung lebendiger Kräfte“.[1]) Wir würden daher niemals sagen können, ob einige dieser Beziehungen, die augenblicklich uns nicht vorstellbar gewesen sind, uns je vorstellbar gewesen sind oder es je sein werden. Daher, wenn wir auch die Möglichkeit einer Veränderung in unserer Anschauungsform im absoluten Sinne nicht verneinen können (wofern nicht die Zeit subjektiv ist), müssen wir verneinen, dass wir die geringste Kenntnis von solcher Veränderung haben könnten. Sie würde für uns ebenso unerkennbar sein wie eine absolute Bewegung des Universums oder eine Veränderung des transscendentalen Ichs. Weil, und nur weil solche Veränderungen für uns absolut bedeutungslos, unerfahrbar sein würden, müssen wir diese Dinge als für uns unveränderlich ansehen, jedoch nur für uns, nicht im absoluten Sinne. Aus diesem Grund müssen wir die gegenwärtige Form unserer Anschauung als etwas für uns Feststehendes und Beharrliches annehmen, die ganze vergangene und zukünftige Geschichte unseres Universums in ihr vorstellen, nicht weil wir eine Veränderung in ihr verneinen können, sondern weil wir eine solche garnicht erfassen könnten.

Es ist also auch hier kein Platz für die metageometrische Behauptung, dass die Form unserer Anschauung sich ändern

1) Die betr. Stelle lautet: „Räume von dieser Art könnten nun unmöglich mit solchen in Verbindung stehen, die von ganz anderem Wesen sind; daher würden dergl. Räume zu unserer Welt garnicht gehören, sondern eigene Welten ausmachen müssen. (Vgl. Riehl, Phil. Krit., Bd. I, S. 257.)

könnte, da es doch kein Mittel gibt, davon Erkenntnis zu erlangen, wenn wir auch eine derartige Möglichkeit nicht verneinen können. Solche Veränderung zu bemerken, setzt nicht nur die Zeit als absolut voraus, sondern nimmt bei uns die Fähigkeit absoluter Erkenntnis an. Daher finden wir wieder den Metamathematiker, nicht den Kantianer auf der Seite des Absolutismus unsere Behauptung bestätigen, dass es die sogenannte empirische, nicht die transscendentale Ansicht von der Geometrie ist, die einen Kern des Absolutismus in sich birgt, wie auch sonst die Sache oberflächlich erscheinen mag.

§ 5. Schluss.

Was in diesem Abschnitt gesagt ist, wird, hoffe ich, genügen, die von Helmholtz, Erdmann und Russell zur Unterstützung des mathematischen Empirismus vorgebrachten Argumente zu widerlegen, und obwohl wir die metageometrische Behauptung nicht zurückweisen konnten, dass auch andere Arten von Axiomen, soweit wir wissen, ebenso anwendbar auf die Erfahrung sein könnten, wie die euklidischen, fanden wir, dass der Versuch, sie zu entdecken, absolute Erkenntnis voraussetzte. So werden wir auf die Axiome zurückgeführt, die sich unmittelbar aus unserer Anschauung ergeben, als die einzigen, die gewiss auf unsere Erfahrung anwendbar sind. Und obwohl wir nicht behaupten können, dass sie notwendig im absoluten Sinne sind, müssen wir behaupten, dass sie absolut notwendig für uns sind. Ihre absolute Geltung für uns verneinen, hiesse, wie wir sahen, die absolute Geltung von etwas Anderem behaupten, und der Fehler der Metageometrie bestand darin, dass sie dachte, sie könnte dies Andere entdecken. Sie verfiel so in einen grösseren Absolutismus als der war, dem sie zu entgehen suchte! Und dies Letztere war nach Allem nur ihr eigener unberechtigter Absolutismus.

II. Abschnitt
Die Raumanschauung und die geometrischen Axiome.

§ 1. Die wahre Quelle des mathematischen Empirismus.

In diesem Abschnitt soll nun noch gezeigt werden, wie wir zu den euklidischen Axiomen kommen, und worauf deren Genauigkeit und die Gewissheit ihrer Anwendbarkeit auf die Erfahrung beruht. Ich glaube damit eine sehr wichtige Ergänzung zu der bisherigen Darstellung zu liefern. Die früheren Kritiker der Metageometrie haben sich gewöhnlich nur damit begnügt, die Ansichten ihrer Gegner zurückzuweisen, ohne sich damit abzugeben, einen Gegenbeweis zu liefern, oder wenigstens zu versuchen, klarer zu machen, wie eine entgegengesetzte Ansicht möglich ist. Dies ist ein ernstlicher Mangel, denn die frühesten Gründer der Metageometrie wurden anscheinend zu ihren empirischen Anschauungen nicht so sehr durch triftige philosophische Gründe geführt, als vielmehr dadurch, dass sie die Möglichkeit einer entgegengesetzten Auffassung nicht einsehen konnten. Die philosophischen Argumente, die wir eben erörtert haben, sind nicht die Gründe, die ursprünglich die Mathematiker zu ihrem Empirismus führten, sondern sie wurden erst hinterher zu seiner Rettung beigebracht, als er von den Philosophen angegriffen wurde. Sie erscheinen daher verhältnismässig spät. Der Empirismus taucht zuerst in der Mathematik als ein Ausweg auf. Da die Mathematiker nicht imstande waren, das Parallelenpostulat a priori zu beweisen, nahmen sie ihre Zuflucht zur Erfahrung. Fast mit einer gewissen Ängstlichkeit hatte G a u s s das Dreieck Brocken-Hohenhagen-Inselsberg messen lassen, unfähig, von seiner Mathematik allein aus ausfindig zu machen, ob die Summe seiner Winkel zwei Rechte wären oder nicht. Diese Zuhilfenahme der Erfahrung ist daher fast ein Bekenntnis der

Schwäche von Seiten der Mathematik, was vielleicht die ersten Vertreter der Metageometrie veranlasste, mit der Veröffentlichung ihrer Ansichten zurückhaltend zu sein.

Zum grossen Teil scheint merkwürdigerweise Kant hieran mit Schuld gewesen zu sein. Mehr als irgend ein anderer Philosoph hatte Kant die Fähigkeit, grosse Wahrheiten, die er aussprach, in derartiger Form auszudrücken, dass sie notwendig missverstanden werden mussten. Kant gründete die Gewissheit und Evidenz Euklids auf eine gewisse „Reine Anschauung", und bis auf den heutigen Tag hat niemand recht verstehen können, was er damit gemeint hat. Wahrscheinlich hatte er selbst keine bestimmte Idee davon, abgesehen von der negativen Vorstellung, dass es nicht eine empirische Anschauung war, sondern eine Art inhaltsloses Mittelding zwischen empirischer Anschauung und reiner Vernunft. Kant hatte ganz richtig erkannt, dass die Geometrie weder aus der empirischen Anschauung allein, noch aus der reinen Vernunft allein entspringt, sondern aus etwas, woran beide teilhaben. Daher erfand er dies Mittelding und nannte es „Reine Anschauung". Unmittelbar ergaben sich daraus die geometrischen Axiome durch eine Art innerer Wahrnehmung.[1])

Diese „Reine Anschauung" ist nun von den Metamathematikern insgesamt und sogar von einigen ihrer Gegner verworfen worden. Riehl z. B. sagt: „Der Gegenstand der Geometrie ist nicht die sinnliche Anschauung, er ist überhaupt nicht Anschauung, weder die empirische, den Sinnen gegenwärtige, noch eine nachgebildete in der Phantasie, sondern die Form der Anschauung, welche als solche notwendig selber unanschaulich ist."[2]) Wie können wir nun so eine unanschauliche Anschauung haben? Riehl findet das Wesen des geometrischen Denkens mehr in der Logik als in der Anschauung, ein durchaus metageometrischer

1) Vgl. Weber und Wellstein, „Encyclopädie der Elementar-Mathematik, Bd. II, S. 129—132, 1905.

2) Phil. Krit., Bd. I, S. 102.

Gedanke. Er nennt die Geometrie daher „Logik des Raumes" (a. a. O., S. 99). Er vermeidet die metageometrischen Konsequenzen, nur weil er, wie wir gesehen haben, glaubt, einige der charakteristischen Merkmale unseres Raumes können logisch abgeleitet werden. Der Mathematiker andererseits durchforscht den Inhalt seines Bewusstseins und sagt uns, dass er keine solche inhaltlose Anschauung darin findet, wie Kant sie darstellte. Die einzige Art der Anschauung, deren er sich bewusst ist, ist die empirische, die, welche man hat, wenn ein wirklicher Gegenstand den Sinnen gegenwärtig ist, oder die, welche man in der Phantasie davon nachbildet.[1]) Solche Anschauung ist natürlich ungenau, ungewiss; sie hat nichts von der vollkommenen Genauigkeit, die zu der transscendentalen Anschauung gehören soll. Wir erinnern uns an die Worte von Helmholtz (zitiert oben S. 74, 75), wie er über die Möglichkeit einer solchen Anschauung spottet. Ebenfalls vermag der Psychologe, wenn er den Inhalt des Bewusstseins prüft, keine solche Anschauung darin zu entdecken. So sagt James, dass er sich eines solchen Kantischen „machine-shop" in seinem Kopfe nicht bewusst sei.[2])

Ich glaube, wir müssen zugeben, dass die Metamathematiker und Psychologen hier einen wirklich schwachen Punkt in der Kritik aufgedeckt haben; Kant hatte kein Recht, die Existenz eines dritten Dinges anzunehmen zwischen der empirischen Anschauung und der reinen Vernunft, eines Dinges, das er tatsächlich nicht imstande war näher zu beschreiben, als eben durch diese seine Stellung in Bezug auf die empirische Anschauung und die reine Vernunft, ohne erst zu untersuchen, ob ein solches Ding wirklich existiere oder existieren könnte. Ich glaube, wir müssen die Erklärung der Mathematiker und Psychologen annehmen, dass tatsächlich kein solches Ding existiert. Sie, wenn irgend wer, müssten es wissen. Werden wir damit zur Meta-

---

1) Siehe z. B. Weber und Wellstein, S. 143—144.

2) Psychology, Bd. II, S. 275.

geometrie und zur empirischen Ansicht gezwungen? Ich glaube nicht. Es ist noch ein Ausweg möglich. Könnte nicht die Geometrie sich aus einem Prozesse ergeben, an dem sowohl die empirische Anschauung wie das logische Denken einen Anteil haben, ohne dass diese sich in ein Drittes auflösen? In der Tat ist die Notwendigkeit dieses dritten Dinges hier nicht ganz klar, und wenn wir ohne dieses auskommen können, dann ist es wirklich, wie Helmholtz es bezeichnete, eine unnütze Hypothese. Wenn es einen solchen Prozess gibt, dann muss er notwendigerweise dartun, wie aus einer empirischen und ungenauen Anschauung dennoch apodiktisch sichere und genaue Resultate erzielt werden können. So schwierig diese Aufgabe scheinen mag, so scheint sie mir doch bereits von Kroman gelöst. Nur ist es bei Kroman noch nicht ganz klar, warum die geometrischen Axiome apriorische und nicht vielmehr empirische genannt werden sollen. Tatsächlich sehen einige Mathematiker Kromans Untersuchungen als vortreffliche Stütze für die empirische Ansicht an. Ich werde daher zu zeigen versuchen, dass der von Kroman beschriebene Prozess ein Axiom voraussetzt, dass wir auf Grund des oben (S. 169) angenommenen Kriteriums der Apriorität a priori nennen müssen. Dies Axiom wird sich selbst als eins erweisen, das allem mathematischen Denken zu Grunde liegt, daher als eins der fundamentalsten Axiome des Denkens überhaupt, da es das Prinzip ausdrückt, auf Grund dessen allein das Denken je gerechtfertigt wird, über unsere unmittelbaren Empfindungen hinauszugehen.

Die wahre Quelle des mathematischen Empirismus ist also, glaube ich, in dieser Verwerfung von Kants reiner Anschauung und in der Annahme nur einer empirischen Anschauung zu finden. Dass dies so ist, erhellt deutlich aus den Schriften der frühesten Gründer der metageometrischen Theorien. Gauss spricht von der „Lebendigen Anschauung des Gegenstandes“ als notwendig für die Geometrie, indem er offenbar die wirklich gezeichnete oder eingebildete Figur

meint (siehe S. 107 oben). Lobatschefsky setzt einfach das Wort „Erfahrung“ an Stelle des Wortes „Anschauung“, und so machen es die meisten der neueren metageometrischen Autoren. Ich werde daher zu zeigen versuchen, dass diese Identifikation von Anschauung und Erfahrung in der Tat imstande ist, die Haupteigentümlichkeiten der Metageometrie zu erklären.

Erstens führt diese Identifikation von Anschauung und Erfahrung zu einer Herabwürdigung der Anschauung und folglich zu einer Übertreibung der Wichtigkeit der rein logischen oder begrifflichen Operationen, also zu dem schroff formalistischen Charakter der neueren Mathematik, von dem wir oben (S. 105) Kenntnis genommen haben. Die Anschauung wird eine rein sekundäre Hilfe, nicht mehr eine Quelle der geometrischen Wahrheiten, sondern im Gegenteil vielmehr die Quelle aller unserer Irrtümer. Ihre Unzuverlässigkeit wird hoch übertrieben. Man wird auf Sinnestäuschungen aufmerksam gemacht. Daher das Verlangen, den Gebrauch der Anschauung möglichst zu beschränken, die übermässige Bewunderung für die, die ohne oder fast ohne sie auskommen können. Logik (und Arithmetik) werden jetzt als die alleinige Quelle der Gewissheit, der wahren Allgemeinheit und Notwendigkeit angesehen, der Satz des Widerspruchs als das alleinige Kriterium der objektiven Wahrheit.

Zweitens führt diese Identifikation von Anschauung und Erfahrung zu der Ansicht, dass die Geometrie eine physikalische Wissenschaft sei. Wenn in unserer Anschauung nur abgeschwächte Kopien solcher Gegenstände zu finden sind, wie wir sie wirklich erfahren haben, oder Gegenstände, deren Elemente wir wenigstens wirklich erfahren haben, obwohl vielleicht in verschiedenen Kombinationen, warum sich dann mit diesen unbestimmten Anschauungsbildern beschäftigen, wenn ein viel grösserer Grad von Genauigkeit offenbar durch die Beschäftigung mit den Gegenständen selbst, die sie darstellen, erreicht werden kann? Die Anschauungsbilder mögen ein bequemes Mittel sein, aber nur,

weil sie uns die wiederholte Konstruktion der wirklichen Figuren ersparen. Man kann sich aber nur soweit auf sie verlassen, als man ihrer ganz sicher sein kann. Alle zweifelhaften Fälle können nur durch das tatsächliche Experiment entschieden werden. Auf diese Weise wird man zu der Anschauung geführt, dass die wirklichen Gegenstände der geometrischen Forschung die physischen Körper um uns sind. Zugleich ist es ersichtlich, dass es nicht ihre physischen oder chemischen Eigenschaften sind, die uns hier angehen, sondern ihre geometrischen. Daher ist irgend ein Kriterium notwendig, diese Eigenschaften von den andern zu unterscheiden. Helmholtz hat dies Kriterium darin gefunden, dass die Geometrie sich mit dem Verhalten der Körper bei ihrer Bewegung beschäftige, und dies Kriterium wird von den meisten seiner Nachfolger, Lie, Poincaré u. s. w. angenommen.

Dies führt naturgemäss zu der physischen Auffassung des Raumes als einer objektiven Realität, welche sich in derselben Weise zu unserem Wahrnehmungsraum verhält, wie die physischen Gegenstände sich zu unseren Wahrnehmungen von ihnen verhalten. Da der Gegenstand der Geometrie dann als die Entdeckung der Eigenschaften dieses realen Raumes aufgefasst wird, so werden physiologische Untersuchungen über die Beziehungen unserer Wahrnehmungen überhaupt zu den physischen Gegenständen, die jene verursachen, ein wichtiges Hilfsmittel für die Geometrie. Daher wird die Natur unseres Wahrnehmungsraumes oder unseres Vorstellungsraumes viel mehr ein physiologisches oder psychologisches Studium als ein mathematisches.[1]) Die Methode der Geometrie wird also induktiv

1) So glaubt Poincaré, dass sogar die Dreidimensionalität unseres Vorstellungs- oder unseres Wahrnehmungsraumes nur durch die physiologische Tatsache bestimmt wird, dass eine beständige Beziehung besteht zwischen den beiden Faktoren, durch die beim Sehen die Tiefe wahrgenommen wird, nähmlich zwischen der Akkommodation und der Konvergenz. Könnte diese beständige Beziehung irgendwie aufgehoben werden, dann würden die beiden Faktoren, meint er, wie unabhängige mathematische Variable

wie die der anderen Wissenschaften, da ihre Aufgabe ist, die Natur der äusseren Realität um uns zu erklären durch Bildung von Hypothesen, die hinterher an der Erfahrung geprüft werden sollen. Eine offenbare Konsequenz dieser Anschauung ist die notwendige Beschränkung der Anwendung unserer geometrischen Sätze auf das Gebiet der unmittelbar verifizierbaren Erfahrung. Wie die Massbeziehungen im Unmessbargrossen oder im Unmessbarkleinen sind, sagt Riemann, sind wir nicht im stande zu sagen. Und ebenso leugnet Helmholtz, dass wir bestimmen können, ob zwei Gerade in derselben Ebene unendlich verlängert sich nur einmal oder zweimal treffen (S. 37 u. 75). Ebenso verwirft Veronese die euklidische Definition der Parallelen als Linien, die in derselben Ebene liegend, unendlich verlängert sich niemals treffen, „non potendo essere mai osservate due tali rette“ (da zwei solche Gerade niemals beobachtet werden können).[1]) Und dies führt zu der Anschauung, dass die wirklichen Massverhältnisse unseres Raumes einen letzten physischen Grund haben. Der Versuch, diesen Grund aufzudecken, wandelt die Metageometrie in eine metaphysische Spekulation um.

Diese Identifikation von Anschauung und Erfahrung ist daher, wie wir sehen, hinreichend, die Haupteigentümlichkeiten der Metageometrie zu erklären, und ist in der Tat die wahre Quelle dieser Anschauungen. Ausserdem ist sie auch ihre Hauptstütze heutzutage. So wenig die von

---

wirken, und wir würden dahin gebracht werden, die Dinge in vier Dimensionen zu sehen. (Siehe „La science et l'hypothèse“, S. 72.) Es braucht nicht gesagt zu werden, dass Derartiges unter den vorausgesetzten Umständen nicht der Fall sein würde: wir würden nur widersprechende Nachrichten erhalten hinsichtlich der Abstände der Gegenstände nach der dritten Dimension, und wir würden entweder den einen der genannten Faktoren zu Gunsten des anderen aufzugeben haben, oder beide zu Gunsten einer dritten und zuverlässigeren Methode, diese Entfernungen zu bestimmen.

1) Veronese, „Il vero nella matematica“. Vortrag, gehalten in der Universität zu Padova. November 1905.

Helmholtz, Erdmann und Russell zur Verteidigung des angegriffenen mathematischen Empirismus beigebrachten Argumente zur Entstehung dieser Anschauung beitrugen, ebenso wenig tragen sie heute im allgemeinen zu ihrer Unterstützung unter den Mathematikern bei. Sondern diese gründen, wie aus ihren Schriften deutlich hervorgeht, ihren Glauben an ihn fast gänzlich auf die angenommene Ungenauigkeit der Anschauung und die alleinige Zuverlässigkeit der Logik und Arithmetik.

§ 2. Die apodiktische Gewissheit der euklidischen Geometrie.

Wir haben zu Anfang dieses Kapitels selbst Kants reine Anschauung verworfen und nur die Möglichkeit einer empirischen und daher ungenauen Anschauung angenommen. Werden wir dann zu dem metageometrischen Schlusse gezwungen, dass die Geometrie darum empirisch und ungewiss sei? Mindestens ein Umstand verhindert dies.

Der Metamathematiker hat oft geglaubt, den Kantianer in die Enge zu treiben durch die Behauptung, Kant habe ganz ungerechtfertigt die apodiktische Gewissheit Euklids angenommen und seine Theorien darauf gegründet. Nun habe die Metageometrie entdeckt, dass Euklid nicht apodiktisch gewiss ist; also fiele Kants Doctrin zusammen. Dass nun Kant die apodiktische Gewissheit Euklids ohne Beweis angenommen und einen Teil seiner Argumente auf diese Annahme gegründet hat, kann nicht geleugnet werden. Für ihn war es ganz selbstverständlich, da bis auf seine Zeit die Gewissheit Euklids niemals angezweifelt, sondern allgemein anerkannt worden war. Aber hat der Metamathematiker entdeckt, dass Euklid nicht apodiktisch gewiss ist? Auf Grund des von ihm eingenommenen empirischen Standpunkts folgt natürlich die Ungewissheit Euklids. Aber die Berechtigung dieses Standpunkts ist noch nicht gefunden worden. Wenn der

Metamathematiker seine empirischen Anschauungen auf die Ungewissheit Euklids gründet, dann hat er sie gerade ebenso sehr auf eine unbegründete Annahme gegründet, wie Kant, der einen Teil seiner Lehren auf die angenommene Gewissheit Euklids gründete. Entweder muss der empirische Standpunkt selbst oder die Ungewissheit Euklids unabhängig bewiesen werden. Sie können unmöglich gegenseitig angewandt werden, um einander gegenseitig zu stützen. Ob Euklid apodiktisch gewiss ist oder nicht, ist gerade die brennende Frage. Wenn diese unabhängig sowohl von der transscendentalen Aesthetik als auch von der Metageometrie entschieden werden könnte, so wäre entschieden, welche von den beiden stehen oder fallen muss. So viel ich weiss, ist dieser Versuch noch nicht gemacht worden.

Auf eine Tatsache sei in diesem Zusammenhang hingewiesen. So sehr die Metamathematiker behaupten mögen, dass die Geometrie nicht die apodiktische Gewissheit besitzt, welche ihr bisher zugeschrieben worden ist, so können sie doch nicht abstreiten, dass die Stellung der Geometrie den andern Wissenschaften gegenüber eine ganz eigenartige ist: dass sie noch heutigen Tags einen weit höheren Grad von Vertrauen geniesst, sogar von Seiten der Metamathematiker selbst, als irgend eine andere Wissenschaft. Obwohl absolute Genauigkeit ihr abgesprochen werden mag, muss doch zugegeben werden, dass ihr ein noch weit höherer Grad von Genauigkeit beigemessen wird, als irgend einer anderen Wissenschaft. Diese Tatsache, sahen wir, wurde auch von Erdmann zugegeben, der sie aus Gründen zu erklären versuchte, die, obwohl er sie empirisch nannte, in der Tat, wie wir gesehen haben, rational waren und die sich nur sehr wenig von denen Kants unterschieden.

Eine andere bemerkenswerte Tatsache ist folgende: so laut die Metamathematiker behaupten, dass die Sätze der Geometrie empirischer Natur und von begrenzter Genauigkeit sind, dass ihre Wahrheit erst durch die Erfahrung

bewiesen werden muss, bevor wir wagen können, sie auf die Erfahrung anzuwenden, so hat doch niemand jemals diese Untersuchung unternommen, die doch so wichtig sein soll, nicht einmal die Metamathematiker selbst. Dadurch widersprechen sie ihren Worten durch ihre Handlungen. Mit Ausnahme des von Gauss gemessenen Dreieck und der Erörterung der Parallaxenmessungen ist kein geometrischer Satz je direkt durch die Erfahrung bewiesen. Im Gegenteil, in jeder Spezialwissenschaft werden die Sätze der Geometrie als bereits feststehend angenommen. Nicht einmal ein wahrscheinlicher oder mittlerer Fehler wird ihnen jemals zugeschrieben, wie es der Fall ist bei den Resultaten aller anderen physikalischen Messungen, sondern sie werden als absolut genau oder so nahezu genau angenommen, dass kein merklicher Fehler durch solche Annahme eingeführt werden würde. Niemals wird danach gefragt, wann, wie oder von wem die geometrischen Sätze empirisch bewiesen worden sind. Und wenn auch derartige Beweise versucht würden, so würde es sich bald herausstellen, dass sie absolut unmöglich sind. Jede Wissenschaft setzt daher nicht nur die Geometrie voraus, sondern muss sie auch voraussetzen, weil sie nicht anders kann. Die Genauigkeit der geometrischen Sätze kann nicht durch empirische Messungen bewiesen werden, weil bei allen solchen Messungen jene Genauigkeit schon vorausgesetzt werden muss. Diese Tatsache, auf die von den Philosophen wiederholt hingewiesen worden ist, wird von den Metamathematikern selbst allmählich anerkannt.

Betrachten wir zum Beispiel die Parallaxenmessungen. Keine Messungen sind so genau wie die astronomischen, und deswegen sowie wegen der ausserordentlichen Grösse der gemessenen Figuren hat man mit Recht gemeint, sie würden uns den genauesten empirischen Beweis unserer Geometrie liefern. Es ist aber auch darauf hingewiesen, und zwar nicht zum wenigsten auch von Metamathematikern, dass Parallaxenmessungen sehr komplizierte Sachen sind,

dass der zu bestimmende Winkel nicht direkt gemessen wird, sondern nur als das Endresultat einer langen Reihe von Messungen und Berechnungen erscheint, in deren Verlauf wiederholt gerade der zu beweisende Satz, nämlich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, vorkommt.[1]) Aus diesem Grunde ist darauf hingewiesen, dass nur die allereinfachsten Messungen bei dem Beweis geometrischer Sätze von Nutzen sein können.

Betrachten wir also einfache Messungen. Abgesehen von der Tatsache, dass die notwendig geringe Grösse der Figuren ihre Genauigkeit so sehr vermindert, dass sie sie ganz unbrauchbar macht, so stellt sich heraus, dass sogar die einfachsten Messungen, wenn sie überhaupt eine Genauigkeit haben sollen, sehr komplizierte Sachen werden. In dem Fall von Gauss' Dreieck wurden die Winkel allerdings direkt gemessen; es geschah aber unzweifelhaft mittels Theodoliten oder ähnlicher Instrumente. Nun ist die Konstruktion und die Anwendung eines solchen Instruments sehr kompliziert, wobei nicht nur das Ganze unserer Geometrie vorausgesetzt wird, sondern auch viele mechanische und physikalische Prinzipien. Selbst wenn wir eine gezeichnete Figur in einfachster Weise messen wollen, müssen wir noch irgend welche Art geteilter Lineale anwenden, deren Herstellung eine Teilmaschine, d. h. ein kompliziertes Werkzeug erfordert, dessen Konstruktion Geometrie voraussetzt. Ich glaube, wir müssen daher schliessen, dass einfache Messungen ebenso wenig geeignet sind wie komplizierte, unsere Geometrie zu beweisen, die sie alle in gleicher Weise voraussetzen müssen.[2])

Ferner sind bekanntlich alle Messungen von beschränkter Genauigkeit. Um die objektive Existenz irgend eines

---

1) S. Frischauf, „Absolute Geometrie", S. 137. Killing, Bd. I, S. 18. Pietzker, a. a. O., S. 70. Calinon, a. a. O., S. 598.

2) Vgl. Kroman, S. 85—86, ferner Weber und Wellstein, S. 134.

Phänomens festzustellen, muss diese Genauigkeit untersucht und berechnet und von dem fraglichen Phänomen muss gezeigt werden, dass es den „wahrscheinlichen Fehler" der Messungen überschreitet. Nun setzt diese Untersuchung nicht nur ebenso unsere Geometrie voraus, sondern ist selbst ganz ungewiss. Selbst wenn das beobachtete Phänomen den berechneten wahrscheinlichen Fehler der Messungen überschreitet, könnte das noch herkommen von irgend einer übersehenen Quelle des Irrtums oder von einem unbekannten gleichzeitig wirkenden physikalischen Grunde. Und wenn es triftige Gründe gäbe, die Existenz der fraglichen Phänomene zu bezweifeln, so könnte immerhin die Möglichkeit niemals unterdrückt werden.

Diese Tatsachen sind ebenfalls auf die Frage der Parallaxenmessungen angewendet worden. Angenommen, es wäre erwiesen, alle Sterne des Himmels hätten, wie die metageometrische Theorie fordert, eine positive Parallaxe. Das würde zunächst nur bedeuten, dass sie alle, wie wir erwarten könnten, in endlichen Entfernungen von uns sich befänden. Es würde uns keineswegs zwingen, ein Krümmungsmass anzunehmen. Angenommen aber, wie Stallo meint,[1]) wir hätten irgend welche anderen Mittel, die Entfernungen der Sterne zu bestimmen, zum Beispiel spektroskopische Messungen, und diese zeigten ganz zweifellos, dass diese Entfernungen viel grösser wären, als diejenigen, die den verschiedenen Parallaxen entsprechen: wir würden immer noch nicht gezwungen sein, unsere Geometrie zu ändern, da diese Tatsache jedes Mal erklärt werden könnte, und unzweifelhaft so erklärt werden würde, durch die Annahme irgend welcher unbekannten physikalischen Ursachen. Stallo weist auf die Tatsache hin, dass gerade eine solche anomale Parallaxe von Bradley gefunden wurde und zu der Entdeckung der Aberration des Lichtes führte. Sogar die Metamathematiker selbst haben diese Tatsachen energisch hervorgehoben. Poincaré zeigt, dass solche anomalen Parallaxen immer durch die Annahme

1) a. a. O., S. 230–231.

erklärt werden könnten, dass die Lichtstrahlen gekrümmt wären infolge eines neuen Brechungsvermögens des Äthers.[1] O. Hölder hat gezeigt, dass, da die Beobachtungen, auf denen die Bestimmung einer Parallaxe beruht, zu verschiedenen Zeiten gemacht werden müssen, die erwähnte Abnormität durch die Annahme verschiedener Bewegungsgesetze erklärt werden könnte.[2] In der Tat, die von Helmholtz und Poincaré gegebenen Veranschaulichungen des Verhaltens der Körper in einer pseudosphärischen Welt vermittelst Linsen, Konvexspiegel, Temperaturunterschiede,[3] u. s. w. laufen auf dasselbe hinaus. Sie zeigen, dass das Verhalten dieser Körper erklärt werden kann, ohne unsere Geometrie zu ändern, nur durch Annahme verschiedener physikalischer Gesetze.[4]

Es muss auch bemerkt werden, dass, wenn man das grösste zulässige Krümmungsmass nach der kleinsten bekannten Parallaxe berechnet, wie es gewöhnlich geschieht, der Stern, der diese Parallaxe hat, dadurch als in unendlicher Entfernung angenommen wird, während die Entfernungen aller derer, die grössere Parallaxen haben, entsprechend vergrössert werden müssen. Nun ist es natürlich widersinnig, irgend einen Stern in unendliche Entfernung zu setzen, besonders da alle die Sterne, die zu kleine und infolgedessen unmessbare Parallaxen haben, noch ferner als unendlich fern gesetzt werden müssten. Daher muss das zulässige Krümmungsmass immer kleiner genommen werden,

---

1) „La science et l'hypothèse", S. 93. Dass die Sache durch die Annahme erklärt werden könnte, dass die Lichtstrahlen gekrümmt wären, darauf ist auch hingewiesen von Lotze, Met., S. 248, 1879.

Schmitz-Dumont, S. 434, 1878. Sigwart, Logik, II, S. 75, Anm. 1878. Delboeef, I, S. 461, 1893.

O. Hölder, S. 70, 1900.

2) O. Hölder, S. 70.

3) Poincaré, „La science et l'hypothèse". S. 84.

4) Krause und mit ihm Jacobson behaupten, dass solche anomalen Parallaxen nur zu dem Schluss führen würden, dass wir in unseren Messungen einen Fehler gemacht hätten. A. Krause, S. 57—58, 1878. Jacobson, S. 156—157, 1883.

als das, welches durch die kleinste gemessene Parallaxe gegeben ist. Es fragt sich aber, wie viel kleiner? Das ist eine Frage, die absolut nicht beantwortet werden kann. Aber trotz der Kleinheit der in Betracht kommenden Grössen bewirkt der genaue Wert, der dem Krümmungsmass gegeben wird, einen gewaltigen Unterschied in der resultierenden Verteilung der Sterne im Raum. Die Annahme eines Krümmungsmasses würde diese Verteilung ganz unbestimmbar und die Parallaxenmessungen als ein Mittel, die Entfernungen der Sterne zu bestimmen, praktisch nutzlos machen. In der Tat ist diese Unbestimmbarkeit einer der Hauptnachteile der nichteuklidischen Geometrie in ihrer Anwendung auf die Physik. Wie wir später deutlicher sehen werden, ist die Welt eindeutig bestimmt, nur bei der Annahme der euklidischen Geometrie, und diese Tatsache allein wird wohl genügen, den Naturforscher daran zu verhindern, jemals aufzuhören, diese Geometrie allen seinen Untersuchungen zu Grunde zu legen, sie als die wahre und wirkliche, die „physische" Geometrie zu betrachten.

Wir müssen daher schliessen, dass unser Glaube an die Geometrie nicht von physikalischen Messungen kommen kann, da diese, um ausführbar zu sein, die Geometrie als bereits feststehend voraussetzen müssen. Warum dann solcher unbedingte Glaube an eine Lehre, die, obwohl die Metamathematiker behaupten, sie erfordere einen empirischen Beweis, niemals in gleicher Weise bewiesen ist und nach dem Voraufgehenden niemals so bewiesen werden kann. Einige Versuche der Metamathematiker, diese unzweifelhafte Glaubwürdigkeit der Geometrie zu erklären, wollen wir näher prüfen.

Nach Helmholtz sind die Axiome der Geometrie die „einfachsten Tatsachen der Erfahrung". Sie verdanken ihre Gewissheit dem Umstand, dass sie unzählige Male beobachtet werden, dass sie einen integrierenden Teil nicht nur dieser oder jener Erfahrung, sondern aller unserer Erfahrungen bilden. Die gesamte übrige Geometrie folgt aus ihnen

durch rein logische (und arithmetische) Deduktion. Die Geometrie ist daher die gewisseste der empirischen Wissenschaften. Wenn man jedoch fragt, was diese „einfachsten Tatsachen" sind, auf deren tägliche Beobachtung Helmholtz die vorzügliche Genauigkeit der Geometrie gründet, so stellt es sich heraus, dass sie nicht nur nicht beobachtet werden, sondern auch nicht beobachtet werden könnten, wenn sie einmal existierten. Eine von diesen Tatsachen zum Beispiel ist die Unveränderlichkeit der Körper bei Bewegung. Wie wir gezeigt haben, existiert diese tatsächlich nicht, und könnte nicht festgestellt werden, wenn sie existierte, während die Behauptung, dass die Körper bei Bewegung oder wegen der Bewegung ihre Form nicht merklich ändern, den Begriff geometrischer Starrheit und der Passivität des Raumes voraussetzt. Die Tatsachen, auf die Helmholtz die Geometrie gründet, können daher entweder nicht beobachtet werden, oder sie werden bei solchen Beobachtungen, die gemacht werden können, selbst vorausgesetzt. Wir können daher nicht zugeben, dass er ihre Gewissheit erklärt hat. Und da wir auch bezweifeln müssen, ob das Ganze der Geometrie aus den Axiomen entwickelt werden kann allein durch logische und arithmetische Deduktion, so wird die Unzulänglichkeit der Helmholtz'schen Theorie noch deutlicher.

Bei Weitem die grosse Mehrzahl der Metamathematiker gibt zwar zu, dass die euklidische Geometrie nicht direkt durch die Erfahrung bewiesen werden kann, behauptet jedoch, dass die Anwendungen dieser Geometrie auf die Erfahrung in den Naturwissenschaften durch ihren ausnahmslosen Erfolg eine fortwährende Bestätigung dieser Geometrie sind. Gerade weil die Wissenschaften die absolute Genauigkeit der Geometrie voraussetzen und voraussetzen müssen, doch aber durch diese Annahme in keinen Widerspruch mit der Erfahrung geraten, so bildet ihr Erfolg einen indirekten (oder induktiven) Beweis der Richtigkeit dieser Annahme. Dies Argument klingt in der Tat einfach und zwingend. Doch ist es, glaube ich, durchaus trügerisch. Erstens, obwohl

zugegeben werden muss, dass die Erfahrung uns noch niemals in unseren geometrischen Erwartungen getäuscht hat, insofern diese nach den geometrischen Prinzipien selbst berechtigt waren, so müssen wir uns doch erinnern, dass sie auf Grund der Kantischen Lehre gar nicht anders kann. Diese Tatsache ist also eine ebenso gute Bestätigung der Kantischen Anschauung, wie der empirischen. Die Tatsache, dass unsere Geometrie offenbar immer durch die Erfahrung bestätigt wird, ist kein Beweis, dass sie diese Bestätigung verlangt, oder dass unser Glaube an sie von dieser Bestätigung abhängt. Ausserdem ist, wie ich zeigen werde, dieser Erfolg der Wissenschaft in der Tat keine wirkliche Bestätigung von ihr.

Der Physiker findet die Resultate seiner Berechnungen nicht immer durch die Erfahrungen bestätigt. Wenn aber nicht, so findet er durchweg, dass etwas Anderes daran Schuld ist als seine Mathematik. Und selbst wenn dem nicht so wäre, hindert ihn doch immer die Möglichkeit eines solchen Auswegs, jemals seine Zuflucht zu einer Änderung seiner Mathematik zu nehmen. Sein Glaube an sie ist daher ganz unabhängig davon, ob seine Resultate durch die Erfahrung bestätigt werden oder nicht. Überdies ist seine Aufgabe, physikalische, nicht mathematische Hypothesen an der Erfahrung zu prüfen, und dies ist nur bei der Annahme möglich, dass die Mathematik feststeht. Denn wenn das nicht so wäre, wie sollte der Forscher wissen, im Fall eines Widerspruchs mit der Erfahrung, wie viel von dem Irrtum er der Hinfälligkeit der zu beweisenden, physikalischen Hypothese zuschreiben soll, wie viel dem Mangel seiner Mathematik. Die physikalische Hypothese könnte, trotz des Widerspruchs mit der Erfahrung, völlig richtig sein, oder umgekehrt, obwohl scheinbar in völliger Übereinstimmung mit der Erfahrung, könnte sie völlig falsch sein. Es ist klar, dass es unter solchen Umständen unmöglich sein würde, physikalische Theorien durch die Erfahrung zu beweisen. Wenn die Mathematik nicht völlig gewiss ist,

oder wenigstens der Grad ihrer Ungewissheit gewiss, was wenigstens etwas Gewisses in der Mathematik voraussetzt, so wäre sie nutzlos für die Physik. Wie z. B., fragt Russell, könnten wir die Gesetze der Bewegung prüfen, wenn die Bewegung selbst unsere Masse veränderte? Mechanik und Physik setzen Geometrie voraus, zeigt er. Daher können sie nicht als Grundlage der Geometrie dienen. („Foundations of Geometry" S. 78, 88.) Die empirischen Wissenschaften setzen daher immer die Gewissheit der Mathematik voraus und sind unter keiner anderen Annahme möglich.

Wir könnten allerdings ein unbedeutendes Krümmungsmass weit innerhalb der Fehlergrenzen unserer Beobachtungen annehmen, oder annehmen, die Geometrie weiche auf irgend eine andere Weise unbedeutend von der euklidischen ab. Mechanik und Physik würden dann noch möglich sein und noch innerhalb der Fehlergrenzen unserer Beobachtungen mit der Erfahrung übereinstimmen. Aber sie würden viel komplizierter gemacht werden, und da der Wert oder selbst die Existenz eines solchen Krümmungsmasses niemals empirisch festgestellt werden könnte, sondern willkürlich angenommen werden müsste, so würde niemand sich jemals überreden lassen, es anzunehmen. Daher bleibt bestehen, dass unsere Geometrie, ob wir uns für die euklidische oder für die nichteuklidische entscheiden, jedenfalls festgestellt werden muss, bevor wir uns zur Erfahrung wenden.

Dies wird noch klarer, wenn wir beachten, dass nicht nur keine Erfahrung uns zwingen kann, unsere Geometrie aufzugeben, sondern auch andererseits keine Erfahrung uns zwingen kann, bei ihr zu bleiben. Wenn ein Widerspruch mit der Erfahrung den Forscher nicht berechtigt, seine Mathematik zu bezweifeln, so berechtigt auch nicht die Übereinstimmung mit der Erfahrung seinen Glauben an sie, wie wir jetzt sehen werden. Russell hat im Zusammenhang mit Parallaxenmessungen gezeigt, dass sogar das Fehlen der von der Metageometrie verlangten anomalen Parallaxen nicht beweist, dass unser Raum doch nicht

nichteuklidisch ist. Die gewöhnlichen Parallaxen der Sterne können erklärt werden durch die Annahme eines Krümmungsmasses in Verbindung mit optischen Gesetzen, die so verändert sind, dass sie die Wirkungen des Krümmungsmasses geradezu aufheben (Foundations of Geometry S. 100). Ebenso könnten wir das gewöhnliche Verhalten der Himmelskörper erklären durch die Annahme eines Krümmungsmasses und veränderter Bewegungsgesetze. In diesem Falle darf der Wert des Krümmungsmasses auch die Fehlergrenzen unserer Beobachtungen überschreiten. Er darf beliebig gross genommen werden innerhalb vernunftgemässer Grenzen. Die Tatsache also, dass die physikalischen Phänomene unserer Welt vollkommen erklärt werden können auf Grund der euklidischen Geometrie, beweist noch keineswegs die Notwendigkeit dieser Geometrie. Durch passende Veränderung unserer physikalischen Gesetze könnte jede andere Geometrie dazu gebracht werden, dasselbe und in ebenso vollkommener Weise zu leisten. In diesem scharfsinnigen Argumente sieht Russell merkwürdigerweise einen Beweis dafür, dass Euklid empirisch ist, da unsere Wahl dann nur davon abhängen kann, welche Geometrie ihre Aufgabe am einfachsten löst. Das können wir allerdings nur durch Probieren ausfinden. Aber die Erfahrung sagt uns doch nicht, dass die einfachste Geometrie auch die richtige ist. Ob wir also die einfachste wählen oder nicht, ist gänzlich unsere Sache. Die Erfahrung lässt uns hier vollkommen freie Wahl. Und in einzelnen Fällen ist die euklidische Geometrie sogar nicht die einfachste, ähnlich wie zum Beispiel die mechanischen Gesetze sich in der Differentialrechnung einfacher darstellen als in der Algebra, obwohl die Differentialrechnung im allgemeinen komplizierter als die Algebra ist. Meiner Meinung nach würde dieses Argument daher im Gegenteil am besten gegen die empirische Natur Euklids sprechen. Wenn keine Erfahrung uns zwingen kann, unsere Geometrie aufzugeben, und keine Erfahrung uns zwingen kann, bei ihr zu bleiben, dann kann unsere Wahl garnicht auf

empirische Gründe hin getroffen werden. Wenn es nicht möglich ist, aus Gründen a priori festzustellen, welche Geometrie (für uns) richtig ist, dann ist es überhaupt nicht möglich, die Sache festzustellen. Aus diesem Schluss gibt es, glaube ich, keinen Ausweg, so dass wir, selbst wenn sich kein Mittel ergäbe, zu einer Entscheidung a priori zu gelangen, die empirische Anschauung aufgeben und verneinen müssten, dass unser Glaube an Euklid oder an irgend welche andere Geometrie auf empirischen Gründen beruhe oder beruhen könnte.

Wir müssen daher das Argument zurückweisen, dass die Gewissheit Euklid's auf seiner beständigen Bestätigung in den Naturwissenschaften beruht, da diese durchaus nicht imstande sind, eine derartige Bestätigung zu liefern. Unsere Geometrie muss festgesetzt werden, bevor wir uns an die Erfahrung wenden, da die Erfahrung uns in keiner Weise zu dieser Entscheidung verhelfen kann.

Eine andere Theorie, welche die überlegene Genauigkeit der geometrischen Axiome erklären soll, ist die von Klein. Wie wir oben (S. 114) gesehen haben, sind nach ihm die Axiome Forderungen, „dass das, was uns ungenau in der Auffassung vorschwebt, genau richtig sein soll". Nach Klein werden also die Axiome nicht ad hoc aus der Erfahrung abgeleitet, sondern nur durch die Erfahrung angeregt. Der Geist wandelt dann das Rohmaterial der Erfahrung in die feineren und genaueren Begriffe um, die allein für die Zwecke der Wissenschaft passend sind. Klein's Auffassung von den Axiomen ist also ähnlich Erdmann's Auffassung von den Konstruktionsbegriffen. Wir erreichen sie durch eine Art Idealisierung der gegebenen Erfahrung. Und wir müssen hier dieselbe Bemerkung machen, die wir bei Erdmann machten. Da die Erfahrung nicht den hinreichenden Grund für diese Idealisation gibt, da die Erfahrung niemals die Gründe dafür geben kann, dass man über die Erfahrung hinausgeht, so können diese Gründe nur in a priori feststehenden Prinzipien gefunden werden.

Wenn daher die genauen Axiome nicht in der Erfahrung gefunden werden können, so können sie auch nicht durch die Erfahrung nahegelegt werden. Denn wie kann die Erfahrung die Art und Weise andeuten, wie die von ihr gegebenen Resultate geändert werden sollen, um genauer zu werden? Sie zeigt nicht einmal, dass eine solche Änderung möglich oder notwendig ist. In all den rein empirischen Wissenschaften, wissen wir, würde eine solche Änderung der gefundenen Resultate als willkürlich und grundlos angesehen werden, geeigneter, zu noch grösserem Irrtum zu verleiten als der Wahrheit näher zu führen. Obwohl wir alle empirischen Resultate nur als annähernd anerkennen müssen, so kann uns diese Kenntnis doch keinerlei Anleitung geben für die Art und Weise, wie sie zu korrigieren sind. Im Gegenteil, in Ermanglung jedes rationalen Grundes dafür, muss das annähernde Resultat als das richtige genommen werden. Das blosse Vorhandensein eines annähernden Resultates kann keinerlei Anleitung dafür geben, was das richtige Resultat sein kann. Ein paar Beispiele werden dies klarer machen.

Bei den alten Ägyptern war die Geometrie eine empirische Wissenschaft. Aber die von ihnen entdeckten Lehrsätze waren, wie wir heute wissen, oft nicht die richtigen. Doch den Ägyptern war diese Tatsache gänzlich unbewusst. Sie wussten nicht nur nicht in welcher Weise ihre Geometrie mangelhaft war, sondern sie liessen es sich auch niemals träumen, dass sie mangelhaft war, oder dass sie verbessert werden konnte, ausser etwa durch noch sorgfältiger ausgeführte Messungen. Ihre Geometrie schwebte ihnen nicht ungenau in der Auffassung vor, sondern galt als die exakte und wahre Geometrie, als die exakteste bekannte Wissenschaft. Und sie würde wahrscheinlich bis auf den heutigen Tag als solche gegolten haben, wenn nicht inzwischen die deduktive Methode, die geometrischen Wahrheiten abzuleiten, entdeckt worden wäre, da diese Methode allein die Ungenauigkeit der ägyptischen Geometrie zuerst erkennen liess.

Und die Umwandlung, die diese Entdeckung in der Geometrie hervorbrachte, bestand nicht darin, dass die Griechen zu absoluter Genauigkeit erhoben, was den Ägyptern ungenau vorschwebte; denn wie hätten sie durch blosse Betrachtung dieser Geometrie ihre Mängel entdecken können? Vielmehr bestanden ihre Leistungen darin, dass sie das Ganze der Geometrie auf einem völlig verschiedenen Prinzip wieder aufbauten; die Gründe dafür aber und die Anregung dazu hatten durchaus nichts mit der ägyptischen Geometrie zu tun, deren Mängel allerdings dadurch zum ersten Mal ans Licht gebracht wurden.

Was die Erfahrung eingeben kann, wenn sie überhaupt etwas eingeben kann, kann freilich oft irreleitend sein. Es geschieht manchmal, dass ein Resultat herauskommt ganz nahe einer ganzen Zahl oder einem einfachen Verhältnis. Sollen wir dann sagen, dass diese ganze Zahl oder das einfache Verhältnis von der Erfahrung nahegelegt sei und daher richtig sein müsste? Jeder Forscher weiss, dass solche Hinweise der Erfahrung mit äusserster Vorsicht aufgenommen werden müssen. Aus empirischen Gründen allein muss ein komplexes Resultat als ebenso wahrscheinlich angesehen werden wie ein einfaches. Nur weil sich die Mathematik ausschliesslich mit einfachen Verhältnissen befasst, sind einfache Resultate häufiger zu erwarten. Nichtsdestoweniger können wir leicht in dieser Erwartung getäuscht werden. Trefflich wird dies durch die Geschichte der Zahl π gezeigt.

Die früheste Bestimmung dieser Grösse gibt sie einfach als die Zahl 3 (im Talmud und in der Bibel). Dies Resultat wurde offenbar durch ganz rohe Erfahrungen eingegeben. Ein viel genaueres Resultat gibt der ägyptische Geometer Ahmes, dessen „Papyrus Rhind" 2000 Jahre vor Christus zurückdatieren soll und das älteste bekannte mathematische Dokument ist (es wird jetzt im British Museum aufbewahrt). In diesem Schriftstück gibt Ahmes den Flächeninhalt eines kreisförmigen Feldes als gleich an mit dem

eines quadratischen Feldes, dessen Seite 8/9 des Durchmessers des kreisförmigen Feldes ist. Dies würde entsprechen dem Wert von $\pi = (^4/_3)^4 = 3,160 \ldots$, ein Resultat, das nur um 0,6 % zu gross ist. Jevons versuchte einmal, wie nah er an diese Konstante durch sorgfältige Anwendung des Zirkels kommen konnte, und kam bis zu 0,19 % („Principles of Science" S. 234). In Ahmes' Formel haben wir wieder ein verhältnismässig einfaches, von der Erfahrung nahegelegtes Resultat; denn die wirklichen Messungen ergaben wohl nicht gerade dies Resultat, kamen ihm aber so nahe, dass sie es als das richtige erscheinen liessen. Und es würde wahrscheinlich ziemlich viel neuer Erfahrung bedurft haben, des Ägypters Glauben an diese Formel zu erschüttern. Die Hinweise der Erfahrung sind daher hier ganz falsch gewesen. Wer hätte vermuten können, rein aus Gründen der Erfahrung, dass das wahre Verhältnis des kreisförmigen und quadratischen Feldes nicht die einfache Zahl 8/9 war, wie sie von Ahmes gefunden wurde, sondern die nie endende Zahl 0,8862269 . . . ., dass das Verhältnis des Umfanges des Kreises zum Durchmesser nicht die einfache Zahl 3,160 . . . . sei, sondern die ins Unendliche fortgesetzte Zahl 3,14159265. . ., dass es überhaupt kein einfaches Verhältnis zwischen diesen beiden Grössen gibt, dass die obige Zahl auf mehr als 700 Stellen ausgeführt werden kann, wie es geschehen ist von Wm. Shanks (Proc. Royal Soc. Vol. XXI, S. 319, 1872 73, vgl. Jevons a. a. O., S. 234), oder auf eine unendliche Zahl von Stellen, und dass diese Zahl doch dies Verhältnis niemals genau ausdrücken würde. Was die Erfahrung an die Hand zu geben scheint, müssen wir daher nur mit grosser Vorsicht hinnehmen. So lange wir uns auf die Erfahrung allein verlassen, können wir ebenso gut fehl wie richtig gehen mit einer solchen Annahme. Wir müssen daher die Richtigkeit von Galileis Schluss zugeben, wenn er beim Versuch, den Flächeninhalt einer Cykloide durch Wägen zu bestimmen, da seine Messungen ihm diesen Flächeninhalt immer etwas weniger als drei mal den des

Erzeugungskreises ergaben, zu dem Schlusse kam, dass er nicht berechtigt sei, dies Verhältnis ohne weiteres genau als drei anzunehmen. Er weigerte sich also die Eingebung der Erfahrung anzunehmen, obwohl er in diesem Falle das Richtige dabei getroffen hätte. Der Satz wurde mit Recht als nicht wirklich bekannt angesehen, bis er durch Galileis Schüler Torricelli[1]) bewiesen wurde.

Die Erfahrung allein kann daher niemals einen hinreichenden Grund geben, über die Erfahrung hinauszugehen, um etwas anzunehmen, das von dem verschieden ist, was unmittelbar von ihr gegeben wird. Jede solche Abweichung von den unmittelbaren Resultaten der Erfahrung kann nur als willkürlich und unberechtigt angesehen werden, wofern nicht Gründe a priori dafür vorhanden sind. Die Axiome können daher unmöglich Forderungen sein, dass wir das zu absoluter Genauigkeit erheben, was uns ungenau in der Auffassung vorschwebt, da wir nur auf Grund von Axiomen oder Begriffen a priori zuerst gewahr werden können, dass das, was uns in der Auffassung vorschwebt, wirklich ungenau ist, bevor wir entdecken, worin es ungenau ist. Daher muss Klein's Erklärung der hervorragenden Genauigkeit der Axiome als mangelhaft angesehen werden, insofern sie die apriorischen Gründe ausser Acht lässt, auf die hin allein diese Beurteilung der Erfahrung berichtigt werden kann. Wenn wir diese mit in Betracht ziehen, dann kann seine Erklärung nicht länger empirisch genannt werden. Wir können daher, glaube ich, schliessen, dass die über die anderen Wissenschaften hervorragende Genauigkeit der Geometrie ebensowenig empirisch erklärt werden, wie sie von den Empiristen geleugnet werden kann. Sie muss daher a priori feststehen. Und diese apriorische Gewissheit

---

1) Siehe Jevons, a. a. O., S. 235. Ferner gaben die Ägypter den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks an als das Produkt der halben Basis und einer der gleichen Seiten. Siehe Weber und Wellstein, a. a. O., S. 5.

der Geometrie stimmt mit der Definition vom Apriori überein, die wir oben S. 169 gaben, da die absolute Genauigkeit der Geometrie sich als ein notwendiges Postulat unseres systematischen Denkens, d. h. unserer Wissenschaft, ergibt. Wir haben auch gezeigt, dass die einzige Geometrie, die keine willkürlichen Festsetzungen enthält, die einzige Geometrie, die daher von unzweifelhaftem und dauerndem Nutzen für die Wissenschaften sein kann, die euklidische ist; mit Notwendigkeit werden wir also zu dem Schlusse geführt, dass es diese Geometrie allein ist, deren apodiktische Gewissheit feststeht, in dem Sinne, dass sie für die Wissenschaften unerlässlich ist.

§ 3. Unterschied zwischen den Konstruktionsbegriffen und den empirischen Begriffen.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, zu beschreiben, auf welche Weise wir mit Gewissheit und Notwendigkeit auf die euklidischen Axiome geführt werden. Bevor wir jedoch hierauf eingehen, wird es nötig sein, etwas näher im Einzelnen, als es Erdmann getan hat, den Unterschied zwischen den Konstruktionsbegriffen und den empirischen Begriffen zu erläutern. Da der Metamathematiker Kant's reine Anschauung aufgegeben und nur eine empirische angenommen hatte, schloss er, dass, da die letztere notwendigerweise ungenau war, die einzige Quelle, aus der die Geometrie genaue Kenntnis schöpfen könnte, sorgfältige Messungen oder einfachste Beobachtungen wären, ausgeführt an den uns umgebenden physischen Körpern selbst. Auf diesem Wege wurde er auf seine empirischen Ansichten geführt. Wir selbst haben die reine Anschauung aufgegeben und die empirische als die einzig mögliche Anschauung angenommen, haben aber nicht die weiteren Schlüsse des Metamathematikers gezogen, weil keinerlei empirische Messungen oder Beob-

achtungen sich fähig erwiesen haben, die unleugbare hervorragende Genauigkeit der Geometrie zu erklären, und weil diese hervorragende Genauigkeit bei allen empirischen Anwendungen der Geometrie vorausgesetzt werden musste. Wie wir (oben S. 112) hervorgehoben haben, gibt es dann für uns nur noch einen anderen Weg, nämlich den, den Erdmann einschlug, wenn er behauptete, dass die Objekte der geometrischen Forschung weder die Anschauungsbilder noch die physischen Objekte sind, denen diese nachgebildet werden, sondern abstrakte „Konstruktionsbegriffe", für die die Anschauungsbilder nur „Vorstellungsrepräsentanten" sind. Obwohl Erdmann behauptete, dass diese „empirische Ideen" wären, gab er doch zugleich zu, dass sie nicht auf ganz dieselbe Weise wie andere empirische Begriffe, aus der Erfahrung abstrahiert würden. In letzterem Falle, sagt er, abstrahieren wir nur von den variablen Merkmalen der empirischen Gegenstände, um die gemeinsamen ins Auge zu fassen. Bei den Konstruktionsbegriffen andererseits abstrahieren wir auch von gewissen gemeinsamen Merkmalen und verwandeln dann die übrigbleibenden Merkmale auf eine gewisse charakteristische Art, für die der zureichende Grund nicht durch die Erfahrung gegeben wird, durch die sie jedoch so umgewandelt werden, dass sie nicht mehr etwas entsprechen, was in der Erfahrung gefunden werden kann. Wenn dem so ist, dann können, wie wir gezeigt haben, diese Begriffe nicht mehr empirisch genannt werden; denn wenn nicht die Erfahrung die Gründe geben kann, auf die hin die Erfahrung berichtigt oder überschritten werden kann, dann können diese Gründe nur a priori gegeben werden. Wenn der Prozess, den Erdmann so trefflich beschrieben hat, wirklich der ist, durch den wir zu den geometrischen Grundbegriffen gelangen, dann muss es ein a priori feststehendes Prinzip oder Grundgesetz geben, das ihn rechtfertigt. Das offenbare Fehlen eines solchen Prinzips veranlasste wohl Weber und Wellstein mit Recht zu leugnen,

dass wir wirklich auf diese Art zu unseren geometrischen Grundbegriffen gelangen.[1])

Es ist auch noch eine andere Schwierigkeit mit diseer Erdmannschen Theorie verbunden. Wenn die Merkmale, die das Wesen der geometrischen Grundbegriffe ausmachen, nicht Dinge sind, die in der Erfahrung oder in der Anschauung gefunden werden können, wenn sie, wie nach Erdmann, sich von den am nächsten ähnlichen Gegenständen der Erfahrung in einer Weise unterscheiden, die nicht näher beschrieben werden kann, ohne den in Frage stehenden Begriff vorauszusetzen: worin besteht dann unsere Kenntnis von ihnen? Wie fassen wir sie auf?

Die charakteristischen Merkmale der empirischen Begriffe hingegen sind Dinge, von denen wirkliche Beispiele in der Erfahrung immer zu finden sind. Die Rückenwirbel z. B., die die Klasse der Wirbeltiere bestimmen, können in der Erfahrung nachgewiesen werden. Aber die Geradheit, die den Begriff „gerade Linie" charakterisiert, kann in der Erfahrung nicht nachgewiesen werden. Annäherungen können allerdings nachgewiesen werden, aber gerade was sie charakterisiert, wodurch sie als Annäherung an meine Idee der Geradheit erklärt werden, kann nicht ohne Voraussetzung des fraglichen Begriffs beschrieben werden. Es kann vielleicht eingewendet werden, dass der Rückenwirbel, der die Klasse der Wirbeltiere charakterisiert, nicht der Wirbelknochen dieses oder jenes Tieres, sondern selbst eine verallgemeinerte Idee ist, die in ihrer verallgemeinerten Form wenigstens ebenfalls nicht in der Erfahrung zu finden ist. Das ist unzweifelhaft richtig, aber die voraufgehenden Betrachtungen müssen nur von Neuem angewandt werden. Die Merkmale, die unsere verallgemeinerte Idee von einem Rückenwirbel bilden, sind gewisse Knochenformen, deren charakteristische Merkmale nur durch gewisse Empfindungen gegeben werden. Wird dieser Prozess oft genug wiederholt, so werden wir bei

1) Encyclopädie der Elementar-Mathematik, Bd. II, S. 9—13.

empirischen Begriffen schliesslich immer zu Merkmalen gelangen, die nur durch gewisse Empfindungen gegeben werden können.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei den geometrischen Begriffen. Annähernd, aber nur annähernd, kann ich sinnliche Bilder von Geraden bilden. Gerade das also, was ich mit Geradheit meine, ist niemals in diesen sinnlichen Bildern enthalten. Sie ist überhaupt nichts Sinnliches. Daher kann sie auch nicht aus den Empfindungen abstrahiert werden, sondern sie muss, sozusagen, vorher vorhanden sein; denn durch sie beurteile ich die sinnlichen Bilder; durch sie werde ich mir ihrer Beschaffenheit in der nämlichen Hinsicht zu allererst bewusst. Die eigentlichen Bedeutungen unserer geometrischen Begriffe sind also nicht mit den Sinnen zu erfassen; sie sind nicht durch den Inhalt unserer Vorstellungen gegeben.

Bei den empirischen Begriffen dagegen sind die Bedeutungen, wie wir gesehen haben, nur durch sinnliche Inhalte gegeben, zwar nicht durch den ganzen Inhalt unserer konkreten Vorstellungen, sondern nur durch einen Teil. Ein Teil der Merkmale der Vorstellungen wird nicht berücksichtigt, während ein anderer Teil, der die sogenannten wesentlichen Merkmale des Begriffs ausmacht, beibehalten wird. Der Inhalt dieser zurückbleibenden Merkmale wird aber keineswegs vermindert oder gar zum Verschwinden gebracht, sondern manchmal sogar gesteigert. Solche abstrakten empirischen Begriffe sind allerdings ärmer an sinnlichem Inhalt, als die konkreten Vorstellungen, aus denen sie abstrahiert werden, aber nicht wegen einer Verminderung des Inhalts der wesentlichen Merkmale, sondern lediglich wegen der Vernachlässigung der unwesentlichen Merkmale. Von diesen wird eben deshalb abgesehen, damit die zurückbleibenden wesentlichen Merkmale desto stärker die Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Wenn ich mir zum Beispiel einen Begriff von Weiss bilden will, so stelle ich mir ein weisses Objekt vor, und unter Nichtbeachtung aller seiner

übrigen Eigenschaften achte ich nur auf seine Weisse. Diesen Eindruck von Weiss suche ich mir sogar möglichst zu steigern und, was ich unter dem Begriff Weiss verstehe, ist nur durch diese eigentümliche Empfindung gegeben. Die eigentlichen Bedeutungen unserer empirischen Begriffe sind also nur durch eigentümliche Empfindungen gegeben. Ein sinnlicher Inhalt ist ihnen daher wesentlich.

Man kann vielleicht einwenden, dass viele empirischen Gegenstände durch ihre räumliche Gestalt vorgestellt werden, und durchaus nicht durch ihren Empfindungsinhalt. So erkenne ich eine Rose an der Gestalt ihrer Blätter, garnicht an ihrer Farbe, die tatsächlich ganz gleichgültig ist, da eine Rose verschiedene Farben haben kann. Und die Merkmale, die die Mitglieder der Rosenfamilie botanisch charakterisieren, bestehen in gewissen charakteristischen Formen und Grössen, nicht in gewissen Farben oder Tasteindrücken. Darauf ist zu erwidern, dass jede bestimmte Gestalt ein sinnliches Bild ist und nur als eine eigentümliche Empfindung erkannt wird. Das ist wohl von dem Begriffe zu unterscheiden, den der Geometer benutzt. Das Dreieck, das der Zeichner gebraucht, ist ganz verschieden von dem Dreieck, das der Mathematiker anwendet. Ersteres wird sicherlich durch die Sinne an seiner Gestalt erkannt, letzteres aber wird, mathematisch gesprochen, durchaus nicht an seiner Gestalt erkannt, sondern an seiner Übereinstimmung mit seiner Definition. Die Vorstellung, die ich von der Geradheit eines Lineals habe, ist gänzlich verschieden von dem mathematischen Begriff der Geradheit. Erstere ist aus der Erfahrung abstrahiert und wird völlig bestimmt und beschränkt durch solche Lineale, wie ich sie gesehen habe, letzterer ist nicht aus der Erfahrung abstrahiert und wird durchaus nicht bestimmt oder beschränkt durch solche gerade Gegenstände, die ich gesehen haben mag. Ebenso ist die Rundheit einer Billardkugel ein Begriff, den ich mir aus meinen Erfahrungen mit Billardkugeln bilde, und wenn ich davon spreche, so beziehe ich mich auf die Eindrücke, die solche Rundheit

auf mich macht. Aber die Rundheit eines mathematischen Kreises ist nichts, was durch die Sinne ergriffen werden kann. In diesem sensualistischen Sinne kann von einer Rundheit bei ihm nicht gesprochen werden; denn er kann keinen Grad von der Emfpindung haben, die wir Rundheit nennen. Ein mathematischer Kreis kann also nicht an seiner Rundheit erkannt werden, denn bekanntlich machen Körper den Eindruck völliger Rundheit, die weit davon entfernt sind, im mathematischen Sinne rund zu sein. Man kann durch die Sinne nicht einmal den Unterschied der Vollkommenheit wahrnehmen zwischen der Oberfläche einer astronomischen Linse und der eines gewöhnlichen Spielballs. Mathematische Rundheit ist daher etwas, was sich vollständig den Sinnen entzieht; es ist in der Tat etwas, was nirgends in der Sinnenwelt existiert: es ist eine blosse Idee.

Das Bedürfnis eines Empfindungsinhalts bei den empirischen Begriffen zeigt sich auch deutlich durch ihre Anwendung in den physikalischen Wissenschaften. Hier begegnen wir den abstraktesten der empirischen Begriffe, und es wird beständig der Versuch gemacht, sie noch abstrakter zu gestalten, d. h. ihren Empfindungsinhalt so viel wie möglich zu vermindern; denn auf diese Weise lassen sie sich besser der Berechnung unterwerfen. Das Einzige, was verhindert, dass die Physik eine rein deduktive oder mathematische Wissenschaft und daher vollkommen exakt wird, ist dieser unvermeidliche Rest von Empfindungsinhalt. Daher der Versuch, ihn so viel wie möglich zu vermindern. Aber dieser Prozess kann eine gewisse Grenze nicht überschreiten; denn wenn dieser Inhalt gänzlich entfernt würde, würde die Physik eine rein ideelle Wissenschaft werden, eine Wissenschaft wie die Mathematik von blossen Möglichkeiten, nicht von Wirklichkeiten.

Die Bedeutungen von empirischen Begriffen werden also nur durch sinnliche Inhalte erkannt. Die charakteristischen Merkmale der mathematischen Begriffe dagegen sind völlig

inhaltlos. Wie kennen wir denn diese Merkmale? Wie ist unsere Kenntnis von ihnen so zu sagen psychologisch beschaffen? Die Schwierigkeit der Antwort auf diese Frage hat manche Autoren dazu geführt, diese Bedeutungen doch in dem Inhalt der sinnlichen Bilder zu suchen; denn inhaltslos schien ihnen auch bedeutungslos zu heissen.

Es wird nämlich gewöhnlich gesagt, dass die geometrischen Grundgebilde Grenzbegriffe sind, d. h. dass sie Grenzen sind, denen sich unsere Vorstellungsbilder nähern, wie ihr sinnlicher Inhalt ohne Grenze abnimmt. Zwar kann der Inhalt unserer Vorstellungsbilder nicht bis auf Null reduziert werden, ohne dass sie als Vorstellungen ebenfalls verschwinden. Aber wir reduzieren diesen Inhalt so weit es uns möglich ist, ja bis zu dem Punkt, wo dies Bild zu verschwinden droht, dann nehmen wir in Gedanken an, dass es noch weiter reduziert wird, bis es Null erreicht. Die so nur in Gedanken erreichbare Grenze des Vorstellungsbildes wird als das eigentliche geometrische Gebilde bezeichnet. Das Vorstellungsbild selbst also ist nicht das eigentliche geometrische Gebilde, sondern nur ein Vertreter, ein Repräsentant desselben, wie Erdmann es nennt. Es ist nicht rein um seiner selbst willen da, wie es bei den empirischen Begriffen der Fall ist, sondern es bedeutet etwas Anderes als sich selbst. Es bedeutet eben das Ende eines Prozesses, der mit den Vorstellungsbildern vorgenommen wird, der, obwohl in der Vorstellung begonnen, doch nur im Gedanken vollendet werden kann. So ist unser Begriff von dem Punkt, wird gesagt, nicht die Vorstellung von dem „Minimum visible", mit dem allein wir ihn anschaulich darstellen können, noch der von der Linie der schmalste Streifen, den wir uns sinnlich einbilden können, wie die Sensualisten wollen, sondern sie sind die Grenzen, denen diese Anschauungsbilder sich nähern, indem ihr sinnlicher Inhalt sich unendlich vermindert, wozu sie jedoch niemals gelangen können, ohne als Vorstellungen zu verschwinden.

Weil die Geometrie sich ausschliesslich mit diesen Grenzbegriffen beschäftigt, heisst es weiter, ist sie genau und gewiss. Denn die Vorstellungsbilder sind schwankend und ungewiss; sie sind verschieden zu verschiedenen Zeiten und verschieden bei verschiedenen Menschen. Wenn die Geometrie diese behandele, statt eine genaue allgemeingültige Wissenschaft zu sein, so würde sie lediglich ein schwieriger und ungewisser Zweig der psychologischen Selbstbeobachtung sein. Nur indem wir die Grenzbegriffe benutzen, können wir unabhängig sein von individuellen und zufälligen Variationen. Wie die Vorstellungsbilder selbst auch schwanken mögen, ihre gedachten Grenzen sind zu allen Zeiten und bei allen Menschen dieselben. Daraus folgt, dass die genaue Natur der Vorstellungsbilder selbst, der Grad ihres Inhalts, d. i. der Grad ihrer Annäherungen an die Begriffe, für die sie stehen, innerhalb gewisser Grenzen eine Sache vollständiger Gleichgültigkeit ist, solange man nicht auf die Bilder selbst, sondern nur auf ihre gedachten Grenzen achtet.

Diese Erklärung der Natur der geometrischen Grundbegriffe enthält aber eine Schwierigkeit. Wie wissen wir, was aus den geometrischen Gebilden wird, wenn ihre Linien und Punkte noch über die Grenze unserer Beobachtungsfähigkeit hinaus dünner und kleiner werden? Bis zu diesem Punkt ist alles klar, aber „von da an sind wir vollkommen im Dunkeln und den Fortgang der Verkleinerung können wir weder sehen noch uns vorstellen“.[1]) Was dann geschieht, kann also lediglich Sache der Hypothese sein, und wollen wir unsere Wissenschaft auf solche Hypothesen gründen, die nicht einmal geprüft werden können?

Dieser Prozess der Grenzbildung scheint dem Mathematiker also ganz in der Luft zu schweben. Wie wissen wir, ob es überhaupt solche Grenzen gibt, ob überhaupt etwas irgendwie Fassbares noch bleibt, wenn der Inhalt der

1) Weber und Wellstein, II, S. 9.

Vorstellungsbilder auf Null reduziert wird? Wie wissen wir, ob nicht der Begriff gleichzeitig mit dem Inhalt der ihn repräsentierenden Vorstellung schwindet? Das ist in der Tat der Fall bei den empirischen Begriffen. Hier decken sich Inhalt und Bedeutung der Vorstellungsbilder vollkommen.

Unser Begriff von Kraft zum Beispiel wird uns durch gewisse Muskelempfindungen gegeben und ursprünglich nur durch diese. Grosse Kraft stellen wir durch eine grosse Menge dieser Empfindung dar, eine geringe Kraft durch eine kleine. Wenn wir uns diese Empfindung auf Null reduziert denken, dann kommen wir, anstatt unserer wahren Meinung gerade so viel näher zu kommen, wie bei den mathematischen Begriffen, nur zu dem Begriff von keiner Kraft. Also Bedeutung und Inhalt variieren zusammen und verschwinden zusammen. Der genaue Grad des Inhalts ist daher nicht mehr gleichgültig, sondern ihm kommt eine wesentliche Bedeutung zu. Aus diesem Grunde können wir uns keine hinreichende Vorstellung von solchen Kräften bilden, die entweder zu gross oder zu klein sind, um innerhalb der merklichen Variationen dieser Empfindung zu fallen, sondern wir können diese uns nur dadurch fassbar machen, dass wir sie als Vielfache oder als Bruchteile solcher Kräfte darstellen, die wir uns so veranschaulichen können. Ich kann mir z. B. keine genaue Idee von der Kraft machen, die notwendig ist, um einen Eisenbahnzug in Bewegung zu setzen, weil die grösste Kraft, die ich ausüben kann, noch nicht genügt, einen einzigen Wagen zu bewegen. Ich kann mir aber eine Idee von der Kraft machen, die ein Pferd imstande ist auszuüben, weil man mir sagt, sie sei etwa sieben Mal so gross, wie die Leistungsfähigkeit eines Mannes. Ich kann dann eine symbolische Vorstellung von der Kraft bekommen, die nötig ist, den Zug in Bewegung zu setzen, wenn man mir sagt, wieviel Pferde dazu erforderlich sein würden. Ebenso kann ich mir keine genügende Vorstellung machen von der Kraft, die notwendig ist, die Nadel eines empfindlichen Galvanometers eben zu be-

wegen, da die leiseste Berührung mit meinem Finger die Nadel über die Skala hinschiebt. Eine Idee davon kann ich bekommen, wenn mir gesagt wird, das es ein so und soviel Tausendstel oder Zehntausendstel von dem Druck ist, den ein Grammgewicht auf meine Hand ausübt.

Bei den empirischen Begriffen variieren also Inhalt und Bedeutung zusammen, bei den mathematischen Begriffen variieren sie, sozusagen, im umgekehrten Verhältnis, d. h. je mehr der Inhalt reduziert wird, um so näher kommen wir unserer wahren Meinung und theoretisch gelangen wir zu ihr nur, wenn der Inhalt auf Null reduziert wird. Aber bei diesem ganzen Prozess ist es noch durchaus nicht klar, auf welche Weise wir diese wahre Meinung kennen. Dass es solche Grenzen gibt, scheint immer noch eine reine Annahme zu sein. Die Frage bleibt also noch unbeantwortet: Was wissen wir von solchen Grenzen?

Die richtige Antwort darauf ist überraschend einfach. Wir wissen überhaupt nichts von ihnen; und ferner als Mathematiker brauchen wir nichts von ihnen zu wissen, nicht einmal, ob sie existieren. Der Mathematiker kennt nur Verhältnisse. Die Mathematik ist nur ein System von Verhältnissen. Die Glieder, die in diesen Verhältnissen, auftreten, kennt er nur durch ihre Verhältnisse zu anderen Dingen. Sie sind sozusagen nur Verhältnis*zentren* oder Verhältnisträger. Sie sind für ihn nur *die* Dinge, welche *diese* bestimmten Verhältnisse mit den andern haben. Wie sie aber an sich beschaffen sein müssen, damit sie in diesen bestimmten Verhältnissen auftreten, geht ihn garnichts an. Das geht nur den Philosophen an. Dem Mathematiker genügt es, dass sie *so* beschaffen sind, dass sie in diesen bestimmten Verhältnissen auftreten können.

Aus diesem Grunde entsteht der unvermeidliche Zirkelcharakter alles mathematischen Definierens, den *Russell* aufgedeckt hat. Wenn wir die kompliziertere Verhältnisse immer durch die einfacheren definieren wollen, werden wir

schliesslich zu den einfachsten Verhältnissen geführt. Diese müssen dann entweder undefiniert bleiben oder in komplizierteren Ausdrücken definiert werden. Wie Russell sagt: „Any definition of points must be effected by means of the straight line, and any definition of the straight line must be effected by means of points. . . . We may regard the straight line as a relation between two of its points, but we may also regard the point as a relation between two straight lines through it.“ [1]) So wollte Lobatschefsky, die Gerade und die Ebene durch den Kreis und die Kugel definieren, was unzulässig ist, weil letztere den Punkt und die Gerade voraussetzen. Doch ist es noch vielfach Mode, die Kugelgeometrie vor die Planimetrie zu setzen.

Aus diesem Zirkel kommt man nicht heraus, so lange man im Bereiche der reinen Mathematik bleibt. Daher geht der heutige Mathematiker in anderer Weise vor. Er sucht nicht einmal seine Grundbegriffe zu definieren. Er nimmt sie einfach an. Er begnügt sich damit, blos diejenigen Eigenschaften dieser Begriffe aufzuzählen, welche er hinterher benutzen will. So verfährt Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie. Er setzt Punkte, Gerade, Ebenen als die Grundgebilde der Geometrie voraus. Diese definiert er garnicht. In seinen Axiomen gibt er dann blos an, in welche gegenseitigen Beziehungen diese Dinge gesetzt werden dürfen. Wie sie sonst beschaffen sein mögen, ist ihm ganz gleich. Er fordert nur, dass sie solche Dinge sind, dass sie sich in diese bestimmten Verhältnisse setzen lassen. Ebenfalls nennt Lie in seiner Theorie der Transformationsgruppen den Punkt ein Etwas, das durch eine bestimmte Zahl Koordinaten bestimmt wird, den sogenannten „analytischen Punkt“. Es wird sogar behauptet, dass die Hilbertsche Geometrie aufgebaut werden kann mit andern Grundgebilden als Punkten, Geraden und Ebenen im ge-

1) Foundations of Geometry, S. 127.

wöhnlichen Sinne, dass andere kompliziertere Gebilde gefunden werden können, welche ebenfalls den Forderungen seiner Axiome genügen, welche also als Punkte, Gerade und Ebenen dienen können. Solche sind z. B. die Kreise, Kreisbüschel und Kreisbündel einer Ebene, oder die Kugeln, Kugelbüschel und Kugelbündel eines Kugelgebüsches.[1]) Man würde dann nicht eine andere Geometrie bekommen, sondern nur eine andere Interpretation derselben Geometrie. Es geht die Mathematik zunächst also garnichts an, was für Dinge ihre Grundgebilde sind, und sie ist garnicht imstande, diese eindeutig zu definieren.

Eine Erklärung davon ist aber doch notwendig, und wenn diese nicht auf mathematischem Wege gegeben werden kann, so muss es auf anderem Wege geschehen. Denn es ist klar, dass Kreise und Kugeln doch schliesslich aus gewöhnlichen Linien und Punkten gebildet sind. Die Notwendigkeit irgendwelcher Erklärung darüber, was letztere seien, wird daher auf diese Weise nicht umgangen; denn Kreise und Kugeln sind nicht selbst Arten von Punkten, sondern sind aus Punkten gebildete Figuren. Was ist dann ein mathematischer Punkt oder eine mathematische Linie im gewöhnlichen Sinne?

Jeder weiss ohne weiteres, was mit diesen Dingen gemeint ist, sobald es ihm erklärt wird. Wie ist das möglich, wenn er dazu nicht irgendwie aus eigener Anschauung davon imstande ist. Wir haben zur Genüge gezeigt, dass diese Dinge in ihrem wahren Wesen nicht in der Anschauung zu finden sind. Wie ist es dann für den gewöhnlichen Menschen so ohne weiteres möglich, sie zu verstehen? Das kann nur sein, weil sie in gewissen Beziehungen zu seinen Anschauungen stehen. Ich sehe in der Tat keine andere Möglichkeit, wie die Sache erklärt werden kann, als dass diese Begriffe eben die oben beschriebenen Grenzen der Anschauungsbilder sind.

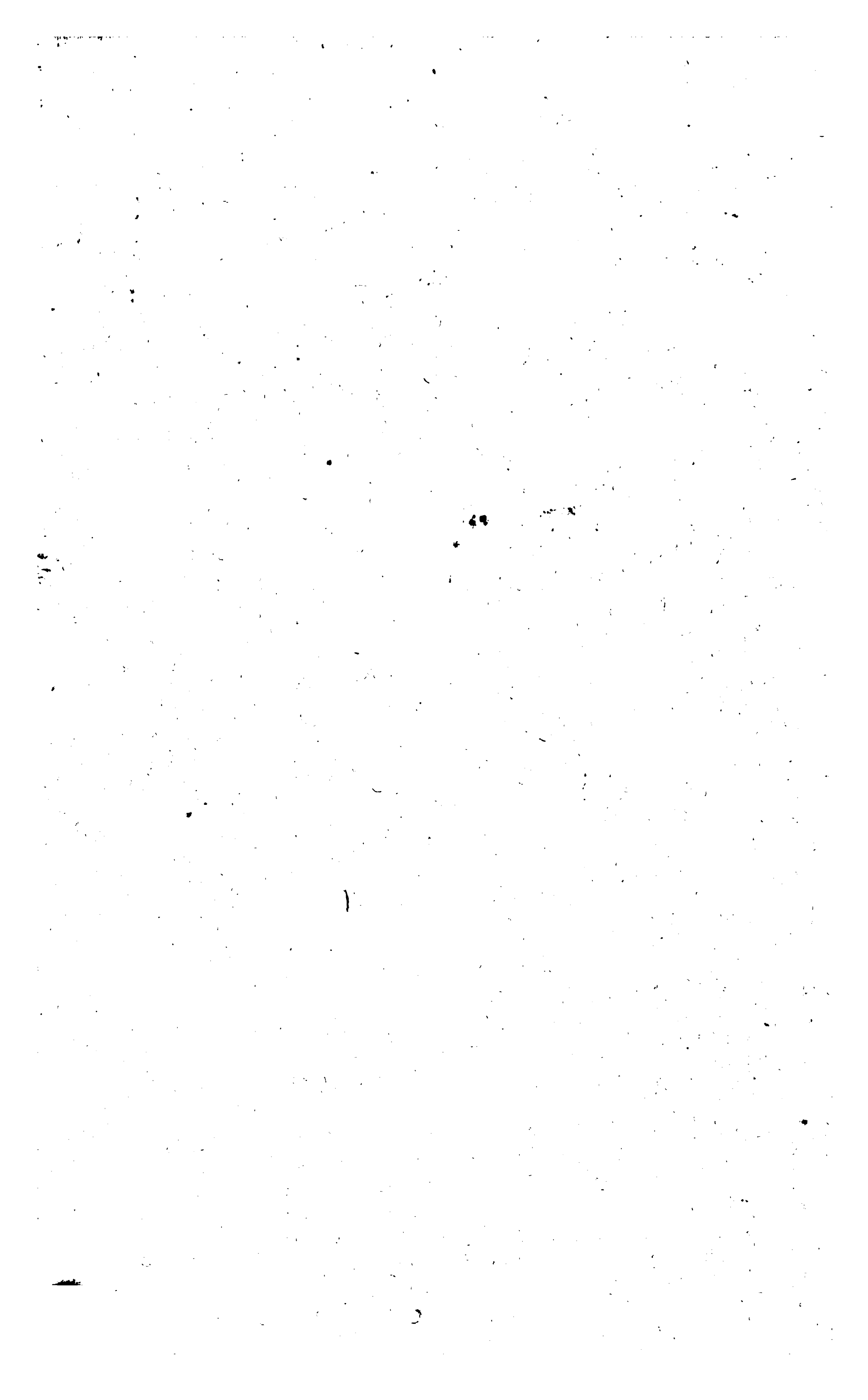
---

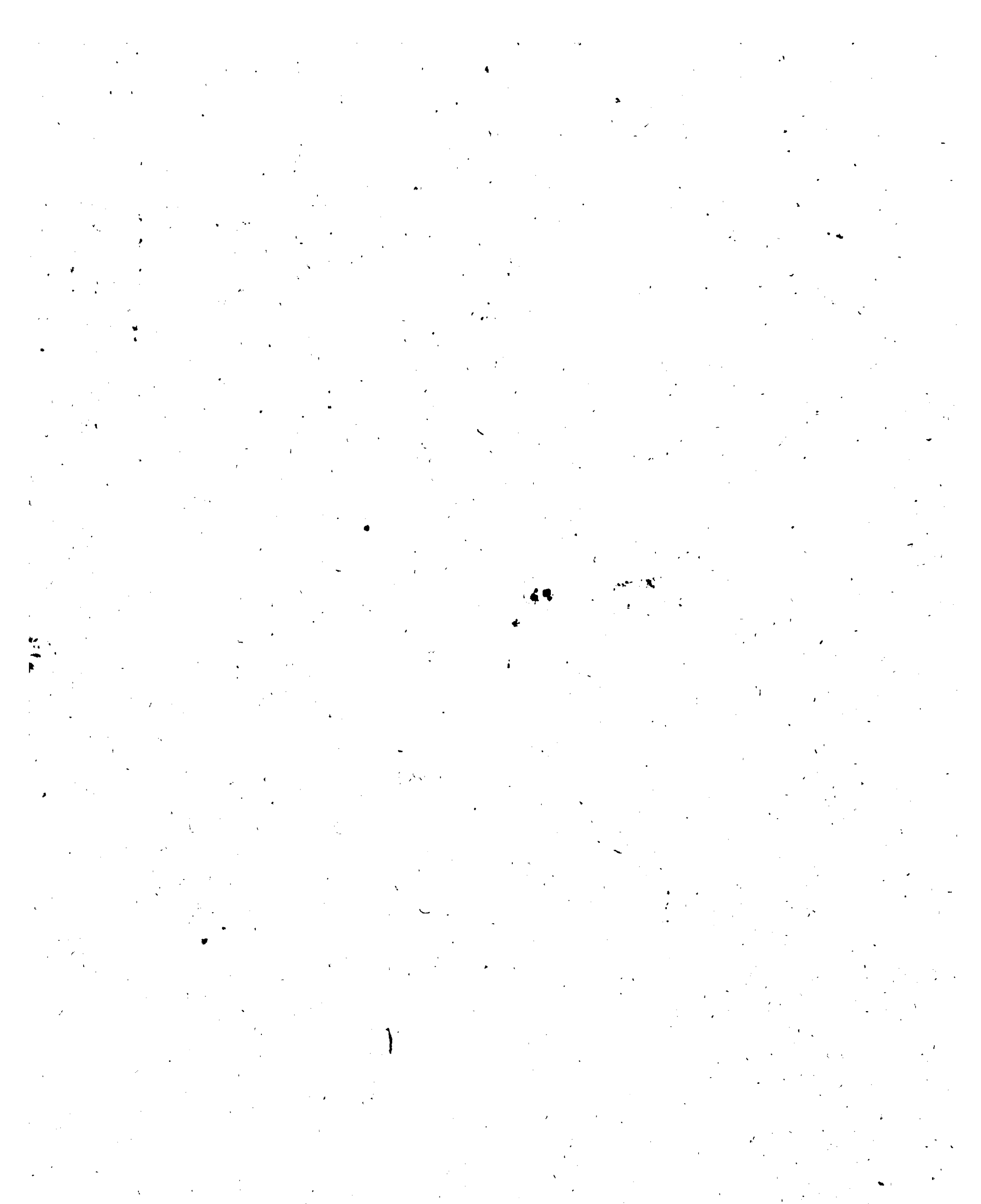
1) Siehe Weber und Wellstein, S. 52—53.

Jedenfalls muss bemerkt werden, dass, obwohl solche „Näherungsmathematik" oder „natürliche Geometrie" wie Weber und Wellstein sie beschreiben,[1]) bei der Benutzung von wirklich gezogenen Figuren möglich ist, man nichtsdestoweniger, sobald man zu der Funktionentheorie oder der metrischen Geometrie kommt, die sinnlichen Bilder verlassen und sich ausschliesslich mit rein abstrakten Begriffen befassen muss.[2]) Aber man versteht ebensowenig, welches der Zusammenhang dieser abstrakten Begriffe mit der Anschauung ist. Andererseits, wenn sie, wie manchmal behauptet wird, keinen direkten Zusammenhang mit den Anschauungsbildern haben,[3]) ist nicht ersichtlich, wie die Resultate der Berechnungen mit diesen Begriffen doch in so ausgezeichneter Weise von der Anschauung und der Erfahrung gelten. Das kann nur sein, weil die ursprünglichen Definitionen, mit denen diese Berechnungen begannen, mit Rücksicht auf die Anschauungen getroffen waren. Was bedeutet dies aber anders, als dass, wenn man von den sinnlichen Bildern ausgeht, man durch eine Art von geistigem Prozess zu abstrakten Begriffen gekommen ist, die, wie man sieht, an Stelle der ersteren gesetzt werden können. Wenn wir dann nicht einen solchen Grenzprozess zulassen, der von den Anschauungsbildern zu den abstrakten Begriffen überführt, entsteht eine zu grosse Kluft zwischen den beiden, und es ist nicht zu verstehen, was sie überhaupt miteinander zu tun haben. Solcher Prozess ist daher notwendig, damit die reine Mathematik eine Bedeutung für die Erfahrung habe. Sonst wird sie eine blosse Untersuchung der möglichen Permutationen und Kombinationen eines Systems willkürlicher Definitionen.

Wie schwierig es daher auch sein mag, die Sache klar zu machen, dieser Grenzprozess ist nicht zu umgehen. Indem wir aber behaupten, dass die Grundgebilde der Geo-

1) a. a. O., II, S. 22—27.
2) Vgl. Weber und Wellstein, a. a. O, S. 22.
3) a. a. O., S. 82.





was zum Körper gehört, zu all den charakteristischen Merkmalen, die gewöhnlich dem leeren Raume beigelegt werden, die sich so als nicht geometrischen Ursprungs erweisen.

Dieser Raum selbst kann daher kaum geometrisch genannt werden; denn er wird nicht nur von der Geometrie vorausgesetzt, sondern ebensogut von der Mechanik und von der Physik. Er sollte lieber Weltraum genannt werden, da er der Raum ist, den die Philosophen als den einzigen Raum bezeichnen. Zugleich ist es aus der Entstehungsweise dieses Begriffs klar, dass wir ebenso wenig Recht haben, seine reale Existenz zu beanspruchen wie die der imaginären Grenzbegriffe, mit denen sich die Geometrie beschäftigt. Er ist eben so ideell und unreal wie sie, — ja in noch höherem Grade. Er ist das Wesen der Dinglosigkeit selbst; denn wir gelangen zu diesem Begriff durch Verneinung von allem, was zum Inhalt unserer Wahrnehmungen gehört. Durch Annahme der realen Existenz des absoluten Raumes andererseits entstehen alle Schwierigkeiten in Bezug auf relative und absolute Bewegung, die Grenzen des Universums (wie sie in Kants ersten beiden Antinomien ausgedrückt sind), die reale Existenz des Raumes und des Stoffes u. s. w. Denn was für ein Unding ist ein unendliches, aber doch reales Ding. Die beiden Prädikate sind einander widersprechend. Und wenn wir eine endliche materielle Welt in eine unendliche immaterielle Leere setzen, so ist es klar, dass sich die Widersprüche häufen müssen. Es ist wahr, dass wir in der Mechanik und Physik unsere Welt als in einem absoluten Raum ansehen. Alle mechanischen und physikalischen Gesetze werden bekanntlich auf den absoluten Raum bezogen, aber nur, weil dies der einzige Weg ist, auf dem die Welt auf Berechnung zurückgeführt werden kann. Wir wissen, dass jeder Raum, den wir mit unsern Mess- oder Wahrnehmungs-Mitteln erreichen können, immer nur relativ ist. Der Weltraum also, sofern er gedacht oder berechnet wird, wird als absolut gedacht. Sofern er wahrgenommen oder gemessen wird,

wird er aber als relativ gefunden. Jedoch nur vermittelst dieses Begriffs vom absoluten Raum können wir gewahr werden, dass jeder solche gefundene Raum immer nur relativ ist. Der absolute Raum existiert also nur im Gedanken, aber hier bildet er einen unentbehrlichen Massstab zur Beurteilung unserer räumlichen Wahrnehmungen. Was diesem wirklich zu Grunde liegt, wissen wir garnicht. Jedenfalls ist es nicht ein wirklich existierender, absoluter Raum.

Wir verstehen jetzt, warum die von Euklid gegebenen Definitionen der Grundbegriffe in der Folge niemals benutzt werden, was an ihnen getadelt worden ist. Wie wir gesehen haben, ist es überhaupt unmöglich, diese Dinge in einer mathematisch brauchbaren Weise zu definieren. Es ist nur möglich, sie psychologisch und erkenntnistheoretisch zu erklären. Die Hilbertschen Axiome dagegen, obwohl sie die mathematisch nützlichen Eigenschaften dieser Begriffe geben, erklären sie nicht; das ist ebenfalls an ihnen getadelt worden. Die Axiome der zweiten Gruppe z. B. definieren den Begriff „zwischen“ nicht, sondern sie setzen ihn voraus, wie wir gezeigt haben (oben S. 109). Was wirklich mit diesem Begriff gemeint ist, wird dem Leser überlassen, sich durch seine eigene Anschauung irgendwie zurechtzulegen. Das hängt alles, wie wir jetzt sehen, von der Natur der Sache ab.

§ 4. Entstehung der geometrischen Erkenntnis.

Wir haben jetzt die Fragen erörtert, die sich auf die Natur der geometrischen Grundbegriffe und auf den geometrischen Raum beziehen. Es bleibt nun noch übrig, die Quelle unserer geometrischen Kenntnis von ihnen zu untersuchen. Denn diese besteht, wie wir gezeigt haben, in einem System von Beziehungen unter diesen Grundbegriffen. Aber diese Beziehungen können nicht von den Grundgebilden selbst abgeleitet werden, z. B. analytisch aus ihren Definitionen. Diese Gebilde sind ja noch nicht mathematisch definiert und können, wenn überhaupt, erst durch diese Beziehungen

definiert werden. Wir haben oben nur den Zusammenhang dieser Gebilde mit der sinnlichen Anschauung erklärt, aber, wie auseinandergesetzt ist, werden diese Erklärungen nicht weiter in der Mathematik benutzt. Andererseits kann uns die empirische Anschauung oder Erfahrung allein keine Kenntnis von diesen Beziehungen geben, wie wir ausführlich in Kap. II § 2 nachgewiesen haben, denn die empirische Anschauung oder Erfahrung ist ungenau, ungewiss, während die Beziehungen, die wir suchen, genaue, gewisse sind; und ferner, die Gegenstände, die sie betreffen, die Grundgebilde, existieren nicht einmal in der empirischen Anschauung oder in der Erfahrung. Wir haben auch die Möglichkeit einer unmittelbaren Kenntnis dieser Beziehungen durch eine „reine Anschauung“ geleugnet. Daher kann uns weder reine Vernunft, noch reine Erfahrung, noch irgend ein Drittes die Kenntnis geben, die wir suchen. Wie wir schon Kap. II § 1 (S. 179) erwähnt haben, gibt es nur eine andere Möglichkeit, nämlich, dass es einen Prozess gäbe, bei dem sowohl die sinnliche Anschauung, wie die reine Vernunft betätigt sind. Ein derartiger Prozess ist tatsächlich von Kroman entdeckt worden.[1])

Die Konstruktionsbegriffe als Grenzen unserer Vorstellungsbilder standen in bestimmten Verhältnissen zu diesen. Es könnten daher gewisse Beziehungen in diesen Vorstellungsbildern entdeckt werden, die wir auch bei den Grenzen als geltend annehmen müssen. Dann ist die Frage, was sind diese Beziehungen, und wie können wir sie mit Gewissheit festsetzen, trotz der Ungewissheit der empirischen Anschauung, und auf was für Gründe hin sind wir zu ihrer Übertragung auf die Grenzbegriffe berechtigt? Nun hat Kroman gezeigt, dass es in der Tat solche Beziehungen gibt, und dass wir sie mit völliger Sicherheit feststellen können, trotz der Ungewissheiten unserer Anschauung. Sie

---

1) „Unsere Naturerkenntnis“. Preisschrift der Kopenhagener Akademie der Wissenschaft. 1881. Deutsche Übersetzung von Fischer, 1883. Die Zitate im Text beziehen sich auf diese.

sind eben jene Lageverhältnisse oder qualitativen Eigenschaften der Gebilde, die, wie wir gesehen haben, gewöhnlich der unmittelbaren Anschauung in fast allen Lehrbüchern der Geometrie überlassen werden, und deren Zurückführung auf eine bestimmte Anzahl von Axiomen das Streben der heutigen Mathematiker ist. Diese Beziehungen bleiben wahr trotz weiterer Variationen in den Anschauungsbildern, sind daher unabhängig von den Ungenauigkeiten der letzteren. Wir haben z. B. verstanden, was mit einem gleichschenkligen Dreieck gemeint ist, und wir haben es durch ein annäherndes Vorstellungsbild oder durch eine Zeichnung dargestellt, und nun wollen wir beweisen, dass das Lot vom Scheitel auf die Grundlinie letztere halbiert: In allen geometrischen Lehrbüchern ist es als selbstverständlich angenommen, dass dies Lot die Grundlinie innerhalb des Dreiecks trifft. Wirklich müsste unser Vorstellungsbild so verzerrt sein, dass es gar keine Ähnlichkeit mit einem gleichschenkligen Dreieck zeigte, um für diese Tatsache zweifelhaft zu erscheinen. Daher wird mit vollem Recht angenommen, dass diese Tatsache ruhig der unmittelbaren Anschauung überlassen werden kann. Selbst wenn ein Beweis dafür verlangt würde, wird sich dieser schliesslich auf andere und noch deutlichere Anschauungen berufen müssen.

Nun ist nach Kroman die Anwendung der Anschauung in der Geometrie ausschliesslich auf die Festsetzung gerade solcher unverkennbarer Tatsachen beschränkt, die wahr bleiben trotz weiterer Variationen der Anschauungsbilder, Tatsachen, die daher ganz unabhängig sind von den Ungenauigkeiten der letzteren und die daher trotz dieser für unbedingt sicher gehalten werden können (Kroman, S. 95).

Aber wie kommt man auf Grund solcher groben Beurteilungen auf die vielen genauen quantitativen Sätze, die in der Geometrie enthalten sind? Die Möglichkeit dieser Sätze hat Kroman in folgender Weise erklärt. Nehmen wir an, wir wollen den Satz prüfen, dass die Gerade die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten ist. Machen wir den

Versuch mit einem zwischen zwei Punkten aufgehängten Strick. (Siehe S. 86.) Wir beobachten, sagt er, dass jede Verringerung der Krümmung begleitet wird von einer Verringerung in der Länge, dass jede Zunahme in der Krümmung begleitet wird von einer Zunahme in der Länge. Ferner, grosse Veränderungen in der Krümmung werden begleitet von grossen Veränderungen in der Länge, kleine Veränderungen in der Krümmung von kleinen Veränderungen in der Länge. Nun liegt kein Grund vor, anzunehmen, dass dies Gesetz, das bis zu den Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens allgemein gültig ist, plötzlich aufhören, oder seinen Charakter über diese Grenzen hinaus ändern sollte, besonders da der Punkt, bis zu dem wir seiner Geltung folgen und sie bestätigen können, ganz von der Schärfe dieses Vermögens abhängt, die durchaus etwas Zufälliges und Variables ist. Daher liegt kein Grund vor, warum dasselbe Gesetz, das für merkliche Veränderungen gilt, nicht auch für die unmerklichen gelten sollte, warum jede unmerkliche Verringerung in der Krümmung nicht ebenso von einer unmerklichen Verringerung in der Länge begleitet sein sollte: „es würde gegen alles methodische Denken verstossen, anzunehmen, dass die unmerkliche Abweichung ein Resultat haben sollte, welches von dem der bedeutenderen Abweichungen qualitativ verschieden wäre," sagt er S. 166. Wenn wir dies annehmen, müssen wir dann schliessen, dass, wenn die Verringerungen der Krümmung über die Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens hinaus fortgesetzt würden, sie jeder Zeit von entsprechenden Verringerungen der Länge begleitet werden würden, sodass, wenn die Krümmung Null wird, die Länge gleichzeitig ein Minimum erreichen muss. In dieser Weise kann der Satz aufgestellt werden. Und dieser Schluss ist in der Tat der einzige, der Anspruch erheben kann auf Allgemeingültigkeit, da es der einzige ist, der unabhängig ist von der verschiedenen Schärfe der Sinne bei verschiedenen Menschen, der einzige, der unabhängig ist von den Ungenauigkeiten und Variationen unserer

eigenen Anschauung. So sagt Kroman: „Ich induziere das Axiom von der Geraden aus unzähligen Anschauungen von mehr oder weniger gekrümmten und gleichzeitig mehr oder weniger langen Linien zwischen zwei Punkten“ (S. 87). Diesen Vorgang nennt er eine Beurteilung der Anschauungsbilder. Ein ähnlicher Prozess, sagt er, wird das Parallelenpostulat geben (S. 88 Anmerk., vgl. auch S. 166—68). Nun besteht nach Kroman alle geometrische Beweisführung darin, dass der Mathematiker sucht, „die verhältnismässig grossen, aber auch verhältnismässig unsicheren Schritte der unmittelbaren Anschauung in lauter kleine, aber dafür sichere Schritte zu zerlegen“ (S. 52). Die Geometrie, zeigt er, ist nicht eine unmittelbare logische Folge ihrer Axiome, sondern wird erst mit Hilfe der Anschauung aus den letzteren entwickelt. Dies erläutert er durch einige Beispiele.[1]) Nichtsdestoweniger dürfen wir nicht willkürlich aus der Anschauung schöpfen, sondern nur die einfachen auffallenden Dinge, die schon wegen ihrer Grobheit absolut unzweifelhaft sind. Jeder, sagt er, kann unterscheiden zwischen einem Pferd und einem Schmetterling. Diesen Unterschied zu machen, und ihn mit Gewissheit zu machen, erfordert keine sehr feine Unterscheidungsfähigkeit. Da der Gebrauch der Anschauung in der Geometrie eben auf solche groben und daher unbedingt sicheren Beurteilungen der Anschauungsbilder beschränkt ist, „so erhalte ich von der Richtigkeit der mathematischen Behauptungen dieselbe Überzeugung wie davon, dass ich überhaupt unterscheiden kann“ (S. 92—93).

Die projektive und andere rein deskriptive Geometrien hängen, da sie keine genauen quantitativen Beziehungen enthalten, gänzlich von den groben Beurteilungen ab. Und wie wir gesehen haben, sind es gerade diese projektiven oder positionalen Beziehungen, die allein in der Elementargeometrie der direkten Anschauung überlassen werden. Dies ist der Grund, warum, wie Weber und Wellstein

1) Vgl. auch Zindler, S. 39.

gezeigt haben (S. 22), wir in der projektiven Geometrie nicht zu den Grenzgebilden zu schreiten brauchen. Die projektive Geometrie ist auch wahr für mit wirklichen Linien und (mässig) ausgedehnten Punkten konstruierte Figuren. Erst wenn wir zu der metrischen Geometrie übergehen, wo von exakten metrischen Verhältnissen die Rede ist, müssen wir zu den Grenzbegriffen übergehen, — denn diese Beziehungen gelten nicht mehr von den gezeichneten oder vorgestellten Figuren, sondern nur von den ideell aufgefassten Grenzgebilden. Das Axiom von der Geraden, das wir eben abgeleitet haben, ist nicht ein Satz, der sich auf eine gestreckte Schnur bezieht, obwohl wir eine solche benutzt haben, um die Ideen zu fixieren und unseren Anschauungen einen Inhalt zu geben. In unserer Anschauung haben wir keine der physikalischen Eigenschaften der gestreckten Schnur betrachtet, sondern nur die beiden Eigenschaften der mathematischen Linien an dem Beispiel der Schnur erläutert, nämlich Länge und Krümmung. Unsere Aufgabe war, zu bestimmen, was die Beziehung zwischen diesen ist durch die ganze Reihe ihrer möglichen Veränderungen. Eben weil wir selbst dekretiert haben, dass bei diesem Experiment keine physikalischen Eigenschaften eine Rolle spielen sollen, dass nur die beiden ideellen Eigenschaften Krümmung und Länge dabei gelten sollen, brauchen wir uns nicht darüber zu quälen, ob Steifheit oder Gewicht des Fadens eine Störung dabei ausüben werden u. s. w. Eben deshalb heisst dies ein Anschauungsexperiment und nicht ein physikalisches Experiment. Aus diesem Grunde ist es auch besser, es mit einer imaginären Schnur auszuführen, als mit einer wirklichen. Man ist so viel weniger der Möglichkeit ausgesetzt, von unwesentlichen physikalischen Umständen gestört zu werden, die, wie wir eben festgesetzt haben, keine Rolle spielen sollen. Deshalb auch die Sicherheit des Resultates, weil wir mit „selbstgeschaffenen", nicht mit „vorgefundenen" Objekten operieren, wie Kroman sagt (S. 94—97).

Diese Theorie Kromans erklärt auch, warum es im allgemeinen zwei Wege gibt, zu einer geometrischen Wahrheit zu gelangen — einen durch direkte Anschauung, den andern mittelst eines regelrechten geometrischen Beweises. Es kommt sehr häufig vor, dass ein Satz, der für die Anschauung ohne weiteres klar ist, sich nur ziemlich schwierig auf einen geometrischen Beweis zurückführen lässt. Der Grund ist folgender. Anstatt alle seine geometrischen Sätze direkt aus der Anschauung zu ziehen, was bei vielen von ihnen wegen ihrer Kompliziertheit jedenfalls unmöglich sein würde, zieht es der Mathematiker vor, nur ein Paar Fundamentalsätze dieser Quelle zu entnehmen, die nämlich, die nicht auf einfachere reduziert werden können, und alle übrigen seiner Geometrie von diesen möglichst rein logisch abzuleiten. Obwohl daher ein Satz für die Anschauung völlig klar sein kann, wird er mit Recht noch nicht als völlig überzeugend angesehen für andere, bis er von den Axiomen in der anerkannten Weise abgeleitet ist. So bewies Euklid in seinem Satz 20, dass die zwei Seiten eines Dreiecks zusammen grösser sind als die dritte Seite, ein Satz, der, wie die Sophisten sagten, sogar für die Esel einleuchtend wäre ohne seinen Beweis dafür. Die Methode des geometrischen Beweises muss selbst in der Tat angesehen werden als eine Methode, die Ungewissheiten der Anschauung zu überwinden und die geometrischen Wahrheiten unbestreitbar zu machen. Wäre die Anschauung absolut gewiss, so würden die geometrischen Beweise unnötig sein.

Es kann vielleicht noch bezweifelt werden, dass alle exakten quantitativen Sätze, die wir in der Geometrie finden, auf diesem Wege erlangt werden können. Wir erinnern daran, dass Helmholtz über die Möglichkeit spottete, solche Sätze, die für die Erfahrung gültig sein sollen, anders zu entdecken, als durch genaue Messungen. Er sprach, als ob es die Aufgabe der Anschauung wäre, die Figuren anzusehen und ihre Grössenverhältnisse sofort mit transscendentaler Genauigkeit abzuschätzen. Er vergass, dass,

wenn das der Fall wäre, dann die relative Beschränktheit der quantitativen Sätze in der Geometrie nicht zu erklären wäre. Es wäre nicht einzusehen, warum es nicht ebenso leicht wäre, geometrisch den Sinus von 59° 21′ 37″, wie den von 60° zu bestimmen. Aber wir wissen, dass dies nicht der Fall ist, dass nur die einfachen Winkelfunktionen geometrisch bestimmt werden können. Der Grund ist, dass alle quantitativen Sätze in der Geometrie auf folgende Weise erlangt werden. Sind gewisse Gleichheiten gegeben, so wird in der oben angegebenen Weise bewiesen, dass gewisse andere Gleichheiten folgen. Oder sind gewisse Ungleichheiten gegeben, so wird gezeigt, dass gewisse andere Ungleichheiten folgen. Ist z. B. gegeben, dass die zwei Seiten eines Dreieckes gleich sind, so beweisen wir daraus, dass daher die anliegenden Winkel gleich sind; oder ist gegeben, dass die Seiten ungleich sind, so beweisen wir, dass die anliegenden Winkel ungleich sind, und zeigen, welcher der grössere ist. Solche Beweise hängen immer von dem Auffinden von Zwischengleichheiten ab. Wo solche nicht zu finden sind, da ist der Beweis unmöglich. Daher die Beschränktheit der Geometrie. Wir können z. B. in der Geometrie den Kreis und die Kugel behandeln, weil diese durch die Gleichheit ihrer Radien völlig definiert werden können. Aber wir können nicht die Ellipse und das Sphäroid behandeln; denn diese können nicht so bestimmt werden. Sie gehören in das Gebiet der Analysis. Allerdings geht die Analysis auch mit derselben Methode vor, Zwischengleichheiten zu finden, sodass auch für sie nicht absolut alle möglichen quantitativen Beziehungen ohne Schwierigkeit zu finden sind. Aber durch die Reduktion geometrischer Grösse auf numerische können, da die Zahlen unendlich teilbar sind, und wir in Gedanken der Teilung beliebig weit folgen können, die Stufen, die eingeschaltet werden können, beliebig klein gemacht werden. Die Möglichkeiten der Analysis übertreffen daher weit die der Geometrie. Aber innerhalb ihres eigenen Gebietes ist die

Geometrie nicht weniger exakt. Weil sie den Sinus von 59° 21′ 37″ nicht finden kann, ist der Wert, den sie für 60° findet, nicht weniger exakt, als der, den die Analysis ergibt. Sie ist deshalb nicht als inexakt, sondern nur als beschränkt zu bezeichnen. Innerhalb ihres eigenen Gebietes ist sie nicht weniger exakt, nicht weniger unabhängig von den Ungewissheiten der Anschauung, als die Analysis selbst.

Dieser Versuch Kromans, unsere geometrische Kenntnis abzuleiten, hat auch eine gewisse Verwandtschaft mit Kants Lehre. Kant behauptete, die Geometrie beträfe nicht den Inhalt unserer Anschauungen, sondern ihre Form, die erzeugenden Gesetze der Anschauung. Die geometrischen Begriffe sind konstruiert. Da wir nun bei Kromans Theorie von allen Variationen der Anschauungsinhalte absehen und gerade das herausholen, was trotz aller dieser Variationen konstant bleibt, so müssen wir diesen Teil als unabhängig vom Inhalte betrachten; er ist eben die Form der Anschauung, das erzeugende Gesetz der geometrischen Gebilde. Der Kromansche Prozess zeigt uns also, wie wir hinter dem Inhalt der Anschauung ihre Form entdecken.

Dies zeigt uns auch, wie wir unterscheiden zwischen den physikalischen, psychologischen und mathematischen Momenten der Anschauungen. Alles, was von dem Inhalt abhängt, gehört der Psychologie. Was dagegen unabhängig ist, besonders das System der idealen Gebilde und Gesetze, zu dem wir durch die oben beschriebenen Prozesse gelangen, gehört der Mathematik. Auf diese Weise bauen wir einen idealen Rahmen auf, der, mit Erfahrungsmaterial ausgefüllt, die physikalische Wissenschaft bildet. Jede Abweichung der tatsächlichen Vorstellungsinhalte von diesen idealen Gebilden schreiben wir den physikalischen Ursachen zu. Und dies ist der einzige Weg, wie die physikalischen scharf von den mathematischen Momenten unterschieden werden können.

§ 5. Das Grundaxiom des mathematischen Denkens.

Die eben beschriebene Methode, um zu geometrischer Kenntnis zu gelangen, ist von einigen empirischen Mathematikern als eine empirische Methode angesehen worden. Ich glaube kaum, dass sie so genannt werden kann, und Kroman selbst beabsichtigte sie nicht als solche. Obwohl Kroman zeigt, dass es, ob wir sie empirisch nennen sollen oder nicht, hauptsächlich davon abhängt, wie wir das Wort „empirisch" definieren, hält er es doch für zweckmässiger, das Empirische so zu definieren, dass es die Mathematik ausschliesst. Es ist sicherlich ein Unterschied zwischen der Mathematik und den anderen Wissenschaften, und dieser Unterschied muss in irgend einer Form ausgedrückt werden. Obwohl, sagt Kroman, beide schliesslich auf Erfahrung beruhen, beruht die Mathematik auf einer Art innerlicher, augenblicklicher Erfahrung, die von jedem zu jeder Zeit gemacht werden kann. Die andern Wissenschaften hingegen beruhen auf äusserlicher Erfahrung, die nicht von jedem zu jeder Zeit gemacht werden kann, sondern die entweder abgewartet oder vorbereitet werden muss, und die in jedem Falle Zeit erfordert. Die erstere Art der Erfahrung führt ferner zu völlig bestimmten und gewissen Resultaten, die letztere nicht. Diesen Erwägungen zufolge zieht er es daher vor, die geometrischen Axiome a priori zu nennen.

Obwohl wir die geistreichen Unterscheidungen, die Kroman macht, einräumen müssen, so gibt es doch noch einen anderen und viel tieferen Grund, warum auf Grund seiner Theorie die Axiome als a priori bezeichnet werden müssen. „Es würde gegen alles methodische Denken verstossen," sagt er, „anzunehmen, dass die unmerkliche Abweichung ein Resultat haben sollte, welches von dem der bedeutenderen Abweichung qualitativ verschieden wäre, so lange nicht irgend welcher vernünftige Grund für diese Annahme zu entdecken ist" (siehe S. 220 oben). Wie sehr

das auch der Fall sein mag, so ist die entgegengesetzte Annahme eine Annahme, die in unserer Erfahrung keine Begründung hat und keine haben kann. Denn die Erfahrung zeigt nur, dass ein gewisses Gesetz Geltung hat bis zu den Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens. Ob es über diese Grenze hinaus Geltung hat oder nicht, darüber ist sie ganz machtlos uns zu belehren, eben weil wir keine Erfahrung mehr über diesen Punkt hinaus haben. Wenn wir dann annehmen, das Gesetz hat über diesen Punkt hinaus noch Geltung, so kann es nur aus apriorischen Gründen sein. Wie selbstverständlich eine solche Annahme scheinen mag, wie unglaublich es scheinen mag, dass es anders sein könnte, besonders da die Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens so veränderlich und so sehr Sache des Zufalls sind, so ist nichtsdestoweniger eine solche Annahme keineswegs die einzige denkbare. Und gerade auf diese anderen „Denkbarkeiten" sind die nichteuklidischen Geometrien gegründet. Wenn Kromans Annahme zu rechtfertigen ist, dann ist sie als ein Axiom a priori zu bezeichnen. Die Axiome sind eben die formulierten Selbstverständlichkeiten.

Wofern nicht dies Axiom festgestellt werden kann, muss unser ganzes System fallen. Unsere erste Frage muss daher sein, was ist seine Berechtigung? Wir müssen meiner Ansicht nach finden, dass diese Berechtigung dieselbe, wie die aller anderen Prinzipien a priori ist, gemäss dem Kriterium von a priori, das oben (S. 169) gegeben ist: nämlich seine Unerlässlichkeit. Wofern wir nicht irgendeine Annahme machen, ist es überhaupt unmöglich, über unsere unmittelbaren individuellen Erfahrungen hinauszugehen, unmöglich, uns über die Ungewissheiten und Ungenauigkeiten der Anschauung zu erheben, — unmöglich, irgendwelche Sätze aufzustellen, die für irgend einen anderen eine zwingende Gültigkeit haben sollen, als für uns selbst. Irgend eine Annahme ist daher notwendig, wenn eine allgemeingültige Erkenntnis überhaupt möglich sein soll. Wenn wir daher nicht annehmen, dass dieselben Gesetze über die Grenzen

unseres Wahrnehmungsvermögens, das innerhalb dieser Grenzen gilt, hinaus Gültigkeit haben, dann müssen wir notwendig annehmen, dass andere Gesetze in diesem Gebiete Geltung haben, und es fragt sich natürlich, was für andere Gesetze. Da dies Gebiet ganz über den Bereich unserer Wahrnehmung hinausgeht, so können solche Gesetze empirisch nicht festgesetzt werden, eben weil wir hier keine Erfahrung mehr haben. Auch können sie nicht induktiv festgesetzt werden, d. h. als Hypothesen, die daran zu prüfen sind, ob sie schliesslich zu den richtigen Resultaten in der Erfahrung zurückführen, was, wie wir gesehen haben, heutzutage lebhaft verfochten wird (oben S. 190 u. 191). Denn diese Gesetze sind Hypothesen, die nur für das Gebiet gültig sind, das über unserer Erfahrung hinausliegt; in dem Gebiet der Erfahrung verlieren sie wieder ihre Gültigkeit. Mit anderen Worten, wir kehren immer wieder zur Erfahrung zurück, auf demselben Wege, auf dem wir sie verliessen; und daher können irgendwelche andere angenommene Gesetze aufgestellt werden, welche alle Tatsachen der Erfahrung ebenso gut erklären wie die gewöhnlichen, wie wir oben sahen. Daher ist kein induktiver Beweis von ihnen möglich. Auch kann kein rationales Prinzip angeführt werden, auf dessen Grundlage solche andern Gesetze festgesetzt werden können. Sie könnten daher nur willkürlich angenommen werden. Noch eine andere Schwierigkeit bietet sich dar. Gesetzt, wir nehmen an, dass andere Gesetze über die Grenzen unserer Beobachtungen hinaus gültig sind, und dass wir auf irgend eine unerklärliche Weise darüber entscheiden können, was sie sind, so entsteht dann die fernere Frage, bei welchem Punkt jenseits der Grenzen unseres Wahrnehmungsvermögens fängt dies verschiedene Verhalten an? Die Schärfe dieses Vermögens ist für verschiedene Personen verschieden, verschieden für dieselbe Person zu verschiedenen Zeiten. Ausserdem kann diese Schärfe durch instrumentale Mittel enorm gesteigert werden, und die Möglichkeiten hierin nehmen von Tag zu Tag zu. Wofern wir daher nicht den

Punkt, bei dem dies verschiedene Verhalten beginnt, über die Grenzen hinaus setzen, zu denen die Besten von uns imstande sind, zu gelangen, unter den besten Bedingungen und mit den besten Mitteln, die uns zur Verfügung stehen, so laufen wir Gefahr, dass unser ganzes System durch zukünftige instrumentale Verbesserungen umgestossen werden könnte. Es ist daher unmöglich, diesen Punkt ein für alle Mal festzusetzen. Es ist unmöglich, auf diese Weise ein System zu erlangen, das für alle Zeiten gültig sein soll. Es ist daher auf doppelte Weise unbestimmt und unbestimmbar. Und dies haben wir (oben S. 192) gesehen, ist gerade die Schwierigkeit bei den nichteuklidischen Geometrien. Obwohl ebenso ideell vollkommen wie die euklidische, obwohl ebenso tauglich, die Tatsachen der Erfahrung unter bestimmten Annahmen zu erklären, enthalten sie nichtsdestoweniger zwei unbestimmte und unbestimmbare Elemente, nämlich den Wert und die Konstanz des Krümmungsmasses. Diese Punkte können, wie wir gesehen haben, weder empirisch, noch rational entschieden werden: — sie können nur durch willkürliches Übereinkommen festgesetzt werden, wie in der Tat die Mathematiker zum grossen Teil über die Konstanz des Krümmungsmasses willkürlich entschieden haben. Das will eben sagen, dass sie nichts anderes sind, als Hirngespinste, das sie überhaupt nichts mit der Erfahrung zu tun haben. Das erste Erfordernis einer wissenschaftlichen Hypothese ist, dass sie an der Erfahrung geprüft werden kann. Das sind die nichteuklidischen Geometrien eben nicht, wie aus ihrer Grundannahme deutlich hervorgeht. Wenn wir uns daher der Kromanschen Annahme nicht anschliessen, dass dieselben Gesetze, die innerhalb der Grenzen unseres Vorstellungsvermögens gelten, auch ausserhalb dieser Grenzen gelten, so finden wir uns, anstatt dass sich uns ein eindeutiger, bestimmter, klarer und einfacher Weg eröffnet, in ein unendliches Labyrinth von verschiedenen Möglichkeiten verstrickt, ohne einen Ausweg zu einer endgültigen Entscheidung oder Übereinkunft zu

erlangen. Die Kromansche Annahme oder die euklidische Geometrie ist daher die einzige, die absolut frei ist von allen willkürlichen und unbestimmbaren Elementen, die einzige, welche zwanglos die Zustimmung aller Menschen für alle Zeiten für sich in Anspruch nehmen kann. Sonst müssen die Mathematiker und Naturforscher zusammenkommen und etwa abstimmen, was für Annahmen gelten sollen. Könnte das aber eine wissenschaftliche Methode genannt werden, die Grundlagen der Geometrie festzustellen?

Dieser Gegenstand wird auch vortrefflich erläutert durch die viel umstrittene Frage der Transportierbarkeit geometrischer Figuren, um die sich viele der Helmholtzschen Argumente drehen. Diese Frage drückt Poincaré (la science et l'hypothèse S. 60) folgendermassen aus: „Deux figures sont égales quand on peut les superposer: pour les superposer il faut déplacer l'une d'elles jusqu' à ce qu'elle coïncide avec l'autre; mais comment faut il la déplacer? Si nous le demandions on nous répondrait sans doute, qu'on doit le faire sans la déformer et à la façon d'un solide invariable. Le cercle vicieux serait alors évident." Viele Philosophen haben dieser Art, die Gleichheit abhängig zu machen von der Möglichkeit, die Figuren aufeinander zu legen, widersprochen. Dies mag unsere einzige Art sein, diese Gleichheit zu prüfen, aber die wirkliche Existenz der Gleichheit kann nicht von der Möglichkeit abhängen, diese Prüfung auszuführen. Wir müssen sicher in der Geometrie die Beweglichkeit der Figuren ohne Formveränderung voraussetzen; denn obwohl diese Tatsache weder empirisch bewiesen noch rational deduziert werden kann, ist sie eine unerlässliche Grundlage der Geometrie.[1]) Eben darum heisst sie ein Axiom. Denn

1) Siehe zum Beispiel:
Land, S. 44–45, 1877.
Weissenborn, II, S. 462—463, 1878.
Jacobson, S. 140–142, 1883.
Kroman, S. 58, 1883.
E. Laas, S. 558, 1884.
Heymans, II, S. 435, 1888.

gesetzt, wir nehmen an, dass sich die Figuren bei Bewegung verändern, dann müssen wir fragen, nach welchen Gesetzen sie sich verändern. Denn Figuren, die sich auf eine völlig unregelmässige und unbestimmte Weise bei Bewegung verändern, sind überhaupt geometrischer Behandlung unfähig. Aber solche anderen Gesetze sind ebenso unmöglich, empirisch zu bestimmen oder rational zu deduzieren, wie das Gesetz von keiner Veränderung. Daher können sie nur willkürlich festgesetzt werden. Wir sind also wieder zu dem Schluss gezwungen, dass die einzig berechtigte Annahme, die einzige, die frei ist, von aller Willkürlichkeit und Unbestimmtheit, die Annahme keiner Veränderung ist.[1])

Aber eine weitere Widersinnigkeit wird von den nichteuklidischen Geometrien begangen, wie Kroman zeigt. Indem sie das Axiom annehmen, dass eine Gerade durch zwei von ihren Punkten bestimmt wird, haben sie schon die von Kroman aufgestellte Annahme angewandt, dass dieselben Gesetze jenseits der Grenzen unseres Anschauungsvermögens gelten wie innerhalb dieser Grenzen; denn ohne diese Annahme kann, wie er gezeigt hat, dies Axiom nicht aufgestellt werden. Nun ist das Parallelenaxiom nichts

---

Zindler, S. 84, 1889.
Pietzker, S. 80, 1891.
Delboeuf, S. 456, 1893, vgl. „Prolégom. philos. de la géométrie." Liège 1860 (zitiert von Erdmann. S. 64).
Russell, S. 150, 1897.
J. Schultz, S. 181, 1899.
Milau, S. 29, 1901.
Natorp, III, S. 374—375, 1901.

1) Es mag auch beiläufig hier bemerkt werden, dass wir durch die Annahme von Veränderung sowohl in physikalische wie mathematische Schwierigkeiten geraten. Denn nach dem Prinzip der Kausalität müssen wir, wenn Figuren sich bei Bewegung verändern, nach der Ursache dieser Veränderung fragen. Natürlich kann es keine physikalische Ursache sein. Daher muss sie auf einer Wirkung des Raums selbst beruhen. Aber wie kann der blosse Raum so nicht nur auf physische Körper, sondern auch auf meine vorgestellten oder gedachten Figuren einwirken? Es ist dasselbe, als wenn ich sagte: Ich kann nicht dieselbe

anderes, als eine weitere Anwendung desselben Prinzips (S. 168). Daher letzteres leugnen, während man ersteres zugibt, heisst das Kromansche Prinzip erst zugeben und dann leugnen. Aber nicht nur das Axiom der Geraden, sondern auch das der Kongruenz, wie wir gesehen haben, der Kontinuität, kurz alle andern Fundamentalaxiome sowohl wie die Grundbegriffe der Geometrie, beruhen auf diesem Prinzip. Erst beim Parallelenpostulat also an seiner Richtigkeit zweifeln, nachdem es bis jetzt unser beständiger und einziger Führer gewesen war, ist eine unerträgliche Inkonsequenz. Darum musste ich das Verfahren von Helmholtz und Riemann für konsequenter halten, als das von Lobatschefsky und Bolyai, indem der erstere alle Axiome als zweifelhaft und empirisch hinstellte (siehe oben S. 26).

Noch weniger zu rechtfertigen ist es, die Möglichkeit von nur zwei andern Gesetzen als über die Grenze unseres Anschauungsvermögens hinaus herrschend neben dem Kromanschen zuzugeben, d. h. nur zwei nichteuklidische Geometrien zuzugeben, wie wir es bei Russell gefunden haben (oben Kap. I. § 4). Denn all die anderen Denkbarkeiten auf irgend welche Gründe hin ausschliessen, heisst eine genaue Kenntnis von dem Gebiet annehmen, das die Erfahrung übersteigt. Solche Kenntnis nennen wir metaphysische.

Figur an einem verschiedenen Ort in meinem gedachten Raume denken; ich kann nicht denken, was ich zu denken wünsche, trotz der Tatsache, dass, was ich so wünsche zu denken, ich bereits gedacht haben muss. Ausserdem opfern wir bei solcher Annahme unser einziges Mittel, zwischen Mathematik und Physik zu unterscheiden. Wir wissen niemals, wie viel von dem Verhalten eines Körpers auf wirklichen physikalischen Gründen beruht, wie viel auf diesem Zwange des Raumes. Ausserdem muss diese zwingende Macht des Raumes als unendlich gross gedacht werden, d. h. sie muss genügen, den Widerstand der härtesten Körper zu überwinden, in einer unendlich kleinen Zeit. Der Körper muss den Anforderungen des Raumes nicht annähernd, sondern genau entsprechen. (Vgl. oben S. 71.) Die Schwierigkeiten und Widersprüche dieser Betrachtungsweise sind daher endlos.

Die Kromansche Annahme oder sein Axiom, wie ich es gern nennen möchte, zeigt sich daher als eine unerlässliche Grundlage aller unserer geometrischen Kenntnis, als die Basis, auf der allein eine eindeutige, bestimmte, allgemeingültige Wissenschaft aufgebaut werden kann. Aber mehr als das. Es liegt der Analysis und der Arithmetik und daher allem mathematischen Denken zu Grunde, wie wir jetzt zeigen werden. Alle Verallgemeinerungen der Analysis hängen, wie Poincaré gezeigt hat, von der sogenannten mathematischen Induktion oder dem Prinzip des rekurrierenden Verfahrens ab. Dies Prinzip stellt er, wie folgt, auf.

Man beweist, wenn ein Satz richtig ist für die Zahl **n**, dann ist er auch richtig für die Zahl **n** + 1. Man verifiziert dann die Tatsache, dass es richtig ist für die Zahl **n** und schliesst daraus, dass es richtig ist für alle positiven ganzen Zahlen. Dieser Schluss ist berechtigt, sagt Poincaré, weil: „il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfînie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible“ (La science et l'hypothèse, S. 23). Aber noch mehr als das. Nicht nur müssen wir denselben Akt unendlich wiederholt denken, sondern wir müssen auch denken, dass jedes Mal, wenn er so wiederholt wird, es immer mit demselben Resultat geschieht. Wir beweisen z.B., dass eine gewisse Operation an Zahlen innerhalb der Grenzen unserer Anschauung ein gewisses Resultat ergibt, und wir nehmen an, dass diese gleiche Operation, irgendwo in der Zahlenskala ausgeführt, auch darüber hinaus, wo es für uns möglich ist, es zu beweisen, auch dasselbe Resultat haben wird. Ohne diese Bestimmung würde der blosse Akt der Wiederholung nichts Neues hervorbringen. Unser gewöhnlicher Begriff von numerischer Unendlichkeit hängt ebenfalls von diesem Axiom ab; denn wir müssen uns die Operation des Zählens ohne Grenze fortgesetzt denken, aber das Resultat des Zählens immer als dasselbe, ganz gleich, wie weit über den Punkt hinaus, bis zu dem wir jemals gezählt

haben können, das Zählen stattfindend angenommen wird. Nur auf diese Weise können wir uns den Begriff von einer unendlichen Zahl bilden und sie von anderen unendlichen unterscheiden.[1]) Die Bildung des Differential-Quotienten ruht ebenfalls auf einer Anwendung dieses Axioms. Wir nehmen an, dass gewisse Beziehungen, die für endliche Veränderungen gelten, auch für unendlich kleine gelten werden. Unendlich kleine Grössen können in der Tat nur dann gebraucht werden, wenn wir wissen, wie sie unendlich klein geworden sind. Wir sehen jetzt auch, warum wir berechtigt sind, in der Geometrie anzunehmen, dass dieselben Beziehungen, die in einem endlichen Gebiet gelten, auch in dem unendlich grossen und in dem unendlich kleinen gelten Wenn dieselben Gesetze nicht gelten, so entsteht die Frage, was für andere Gesetze gelten. Da das unendlich Grosse und das unendlich Kleine ausserhalb unseres Bereiches liegt, können solche anderen Gesetze nur willkürlich aufgestellt werden. Und das tut der Metamathematiker, wenn er leugnet, dass wir ein Recht haben, anzunehmen, dass die Gerade ihre Richtung unverändert beibehält über die Grenzen unserer Wahrnehmungen hinaus, in derselben Weise, wie sie es innerhalb dieser Grenzen zu tun scheint, aber doch behauptet, dass sie einer gewissen bestimmten Kurve folgt. In dieser Weise masst er sich eine weit anspruchsvollere Kenntnis an, als die, die er anfangs angezweifelt hatte. Daher ist die einzige berechtigte Annahme die, dass dieselben Gesetze gelten.

Dies Axiom Kromans liegt daher unserer ganzen Mathematik zu Grunde. Es ist das einzige Prinzip, das

---

1) So sagt auch James: „This consciousness of serial increase of differences is one of the fundamental facts of our intellectual life“ (s. Psychology, Vol. I, S. 490): Auf diese Fähigkeit, eine homogene Reihe zu bilden oder Reihen von gleichen Unterschieden mit einer „constant direction of serial increase“ periodischen Wachstums, die er als eine ursprüngliche Fähigkeit der Seele ansieht, gründet er die Möglichkeit der Logik, Arithmetik und Geometrie, kurz aller Wissenschaften a priori (s. Psychology, Vol. II, S. 644—661).

unsere Mathematik ermöglicht. Aber noch mehr, es liegt aller Wissenschaft überhaupt zu Grunde. Denn auch die empirischen Wissenschaften behaupten mehr, als in unseren unmittelbaren Erfahrungen enthalten ist. Denn unmittelbare Erlebnisse gelten zunächst nur für das Individuum, das sie hat. Damit sie allgemein gelten sollen, muss es in irgend einer Weise über sie hinauskommen; damit die Resultate der Erfahrung von individuellen Unterschieden und Eigentümlichkeiten befreit werden, müssen sie nach gewissen anerkannten Prinzipien uniformiert werden. So kommen wir zu dem Kantischen Begriff, der wissenschaftlichen Erfahrung, als etwas Allgemeinerem als die unmittelbaren individuellen Erlebnisse, etwas, das erst durch eine gedankliche Bearbeitung dieser entsteht. Nun ist das einzige Prinzip, wie wir gesehen haben, auf dessen Basis wir überhaupt berechtigt sind, über unsere unmittelbaren Erlebnisse hinauszugehen, das Kromansche Axiom. Dies Axiom liegt daher all unserem wissenschaftlichen Denken zu Grunde. Wir müssen es daher annehmen, nicht weil es rational bewiesen oder empirisch geprüft werden kann (denn wenn eins von diesen beiden geschehen könnte, so würde es kein Axiom sein), oder weil es die einzige denkbare (widerspruchsfreie) Annahme ist, sondern weil es die einzige Annahme ist, auf deren Grundlage eine allgemeingültige, eindeutig bestimmte, für alle Zeiten feststehende Wissenschaft möglich ist. Es entspricht daher in der genausten Form unserem oben (S. 169) gegebenen Kriterium von Apriori. Wir müssen es annehmen, nicht weil wir wissen, dass es richtig ist, sondern weil wir ohne es nicht auskommen können, weil es das einzige Prinzip ist, auf das hin apriorische Axiome überhaupt angenommen werden können.[1])

---

1) Das ist übrigens nichts anderes als das Hume'sche Prinzip, dass wir das Fortbestehen der Körper, auch wenn sie nicht wahrgenommen werden, annehmen müssen, nur weil wir sonst ausser Stande wären,

§ 6. Schluss.

Wir müssen daher schliessen, dass die euklidische Geometrie die einzige ist, deren Nützlichkeit und Anwendbarkeit auf die Erfahrung versichert werden kann. Sie ist die einzige, die rechtmässig die Zustimmung aller Menschen für alle Zeiten beanspruchen kann. Sie ist die einzige Geometrie, die den Zwecken der Wissenschaft in angemessener Weise dienen kann u. s. w. — denn sie ist die einzige, die eindeutig bestimmt und frei von allen willkürlichen Annahmen ist. Wie interessant und scharfsinnig andere Geometrien auch sein mögen, wie sehr wir auch ihre abstrakte Möglichkeit oder ihre ideelle Vollkommenheit oder unter Umständen sogar ihre Nützlichkeit auf dem Gebiet der r e i n e n Mathematik nicht in Abrede stellen können: nichtsdestoweniger müssen sie, was ihre Anwendbarkeit auf die Erfahrung betrifft, immer nur der Kategorie geistreicher Spekulationen oder Hirngespinste zugerechnet werden, die keinen notwendigen Zusammenhang mit unserer Erfahrung haben oder haben können. Die einzige Geometrie, für die ein solcher Zusammenhang erwiesen werden kann, ist die euklidische.

Zugleich zeigt die oben skizzierte Theorie in Bezug auf die Art, wie wir zu unserer geometrischen Kenntnis kommen, dass die geometrischen Axiome als a priori an-

---

unsere Erfahrung in einen uns befriedigenden, widerspruchslosen, einheitlichen Zusammenhang zu bringen; nicht aber, weil wir irgend wie wissen könnten, dass sie wirklich so fortbestehen. Wir dürfen nicht fragen, sagt er: (Treatise on Human Nature, Anfang, Part IV, Section 11). „Whether there be body or not?" sondern lediglich: „What causes induce us to believe in the existence of body?" Ebenfalls in Bezug auf unser Axiom, oder in Bezug auf irgend welche andere sogenannte apriorische Erkenntnis, dürfen wir nicht fragen: Ist es wahr? Die Antwort darauf würde absolutes Wissen erfordern. Sondern wir dürfen nur fragen: Welches sind die Gründe, die uns zu der Annahme dieses Axioms nötigen? Und diese Gründe können wir ebenfalls mit H u m e nur in seiner Unvermeidlichkeit für unser Erfahrungswissen erkennen,

zusehen sind, weil sie auf einem gewissen Axiom beruhen; dass sie notwendig, aber nur für uns notwendig sind, da sie die unerlässliche Grundlage unserer empirischen Kenntnis bilden. Es zeigte sich auch, dass empirische Kenntnis überhaupt nur unter apriorischen Voraussetzungen möglich ist, da allgemeingültige Kenntnis nur dann möglich ist, wenn man über die unmittelbar gegebenen individuellen Erlebnisse hinausgeht. Zugleich gibt es nur einen rechtmässigen Weg, dies zu tun, und das ist auf Grund des Kroman'schen Axioms. Alle andern Annahmen sind willkürlich und unberechtigt, und da sie Kenntnis von dem Gebiet annehmen müssen, das die Erfahrung überschreitet, so werden sie auch unvermeidlich metaphysisch.

Unsere Aufgabe kann somit, denke ich, als beendet angesehen werden. Im ersten Teil ist gezeigt, dass die metageometrischen Theorien nicht eine direkte Folge der nichteuklidischen Geometrien sind, sondern auch abhängen von dem von den Mathematikern eingenommenen empirischen, erkenntnistheoretischen Standpunkt, der sich somit als eine Voraussetzung, nicht, wie allgemein angenommen wird, als ein Resultat dieser Theorien erweist. In dem zweiten Teil habe ich mich zuerst bemüht, die hauptsächlichen philosophischen Argumente zu widerlegen, die zur Unterstützung des mathematischen Empirismus vorgebracht worden waren, und dann zweitens zu zeigen, wie und warum die aprioristische Anschauung von den Axiomen und daher die euklidische Geometrie die einzig berechtigte ist. Ob nun der Leser diesen meinen Versuch für geglückt ansieht oder nicht, wird wahrscheinlich hauptsächlich von seiner ursprünglichen Überzeugung abhängen, denn es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass man in der Philosophie selten seinen Gegner überzeugt. Aber mag der Leser mit den hier vorgebrachten Anschauungen übereinstimmen oder nicht, hoffentlich wird er sie doch wenigstens seiner Aufmerksamkeit würdig finden und ihnen ein nachsichtiges Urteil schenken.

Literaturverzeichnis.

Die Werke, die mir für die Geschichte der Metageometrie wichtig erschienen, sind auf S. 1, Anm. 1 angegeben. Die wichtigsten mathematischen Original-Arbeiten, auf denen die nichteuklidischen Geometrien beruhen, sind im Texte angeführt, die Zitate aus Kant nach Kehrbach, Reclam Ausgabe.

Folgende Autoren haben die Metageometrie von Seiten der Philosophie verteidigt:

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Vorgetragen am 10. Juni 1854. Gedr. Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen. Bd. XIII. 1867. Und in ges. Werken, Herausg. Dedekind, Leipzig 1876. S. 254—268.

Helmholtz, 1. Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Vorgetragen in der Versammlung Deutsch. Naturforscher und Ärzte in Heidelberg am 22. Mai 1868. Gedr. in Verh. der natur-historisch-medizinischen Gesellschaft. Bd. IV. S. 197—202. 1868. Auch in: Gesammelte wiss. Abhandlungen, Leipzig 1883. S. 610 - 616.

—,— 2. Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. 3. Juni 1868. Nr. 9. S. 193—221. Auch in Ges. wiss. Abh. S. 618—639.

—,— 3. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorgetragen im Dozenten-Verein zu Heidelberg 1869. (70 ?). Vorträge und Reden, Bd. II. Nr. 1.

Helmholtz, 4. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms. Mind, Bd. I. S. 301—321. July 1876.

—,— 5. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms. 2. Aufsatz. Mind, Bd. III. S. 212—225. April 1878. Deutsch in Ges. wiss. Abh. II. Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. S. 640—660.

—,— 6. Die Tatsachen in den Wahrnehmungen. Rede, gehalten zur Stiftungsfeier der Berliner Universität. 3. August 1878. Erst veröffentl. als Programm der Universität und dann mit drei Beilagen im Verlag Hirschwald. Auch in: Vorträge und Reden, 5 Auflage. S. 213 bis 247. Beilagen S. 387—406.

Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. IV, 1871. Bd. VI, 1873. Bd. VII, 1874. Bd. 37, 1890. Vorlesungen, gehalten während des Wintersemesters 1889—90 und während des Sommersemesters 1890, Über Nicht-Euklidische Geometrie. Göttingen 1893.

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.

Otto Liebmann, Raumcharakteristik und Raumdeduktion. Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil. Bd. I. S. 201 ff. 1877. Zur Analysis der Wirklichkeit, II. Aufl. 1880. III. Aufl. 1900.

Calinon, Les espaces géométriques, Revue phil. Juni 1889. S. 594, und andere Aufsätze.

W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 2 Bände. Paderborn 1893/98.

B. Russell, The Foundations of Geometry. Cambridge 1897. The Principles of Mathematics. Cambridge 1903. Recensiert Revue Phil. de la France, Bd. 57. S. 288. 1904.

F. Medicus, Kants transscendentale Ästhetik und die nichteuklidische Geometrie. Dissertation. Jena 1898.

Kleinpeter, Entwicklung des Raum- und Zeitbegriffs in der neueren Mathematik und Mechanik. Arch. f. syst. Phil. Bd. IV. S. 32 ff. 1898. Die Erkenntnistheorie der Naturforschung der Gegenwart. Leipzig 1905.

O. Hölder, Anschauung und Denken in der Geometrie. Vortrag, gehalten am 22. Juli 1899. Leipzig 1900.

H. Poincaré, La science et l'hypothèse. Paris 1902. Deutsche Übersetzung von Lindemann, Wissenschaft und Hypothese. Leipzig 1904.

—,— La valeur de la science. Paris 1905. Deutsche Übersetzung von E. Weber, Der Wert der Wissenschaft. Leipzig 1906. Recensiert Revue phil. de la France, Bd. 60. S. 414. 1905.

—,— Les mathématiques et la logique. Revue de Métaphysique et de Morale, 13. Année, Nr. 6. Nov. 1905. Auch viele frühere Aufsätze in derselben Zeitschrift u.a.

G. Lechalas, Introduction à la géométrie générale. Paris 1904. Auch viele Aufsätze in Revue de Mét. et de Morale u. a.

G. B. Halsted, Rational-Geometry, New-York 1904, und verschiedene Aufsätze.

Weber und Wellstein, Encyclopädie der Elementar-Mathematik. B. II. Erstes Buch, Grundlagen der Geometrie v. J. Wellstein. Leipzig 1905.

G. Veronese, Il vero nella matematica, Discorso inaugurale Universita di Padova, 6. Nov. 1905.

E. Picard, La science moderne et son état actuel. Paris 1906. Deutsche Übersetzung von F. und L. Lindemann. Leipzig 1906. Recensiert Revue philos. de la France, Bd. 61. S. 319. 1906.

Gegner der Metageometrie von philosophischer Seite.

A. Lange, Geschichte des Materialismus, 1. Aufl. 1865. 2. Aufl. S. 450. 1875.

E. Dühring, Kritische Geschichte der Mechanik, S. 448. Berlin 1868. Kursus der Philosophie, Leipzig 1875. S. 67.

J. K. Becker, Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und der Philosophie. Zürich 1870. Auch:

Die Grenze zwischen Philosophie und exakter Wissenschaft. Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage, streng deduktiv dargestellt. Berlin 1877.

J. C. Becker, Über die neusten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raum. Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1872. Die Grundlagen der Geometrie. Schlömilchs Zeitschrift. Bd. XX. 1875. S. 445—456.

Lotze, System der Philosophie. 2 Bde. Leipzig. Bd. I, Logik, 1874, S. 216—217. Bd. II, Metaphysik, 1879, S. 193—267.

W. Tobias, Grenzen der Philosophie. Berlin 1875.

A. Riehl, Der philosophische Kritizismus. Bd. I. S. 99—100. 1876. Bd. II. Kap. 2. 1879.

Land, Kant's Space and Modern Mathematics, Mind. Vol. II. Jan. 1877. S. 38—46.

A. Krause, Kant und Helmholtz. 1878.

Sigwart, Logik. Bd. II. § 67. S. 54—77. 1878.

Schmitz-Dumont, Die mathematischen Elemente der Erkenntnistheorie. Berlin. 1878. Auch ein paar frühere Arbeiten, die jedoch ohne Wichtigkeit sind.

Weissenborn, Über die neueren Ansichten vom Raum und von den geometrischen Axiomen. Vierteljahrsschr. für wiss. Phil. Bd. II. drei Aufsätze, S. 222 ff. S. 314—334. S. 449—467. 1878.

Wundt, Logik. Bd. I. S. 490—505. Stuttgart 1880.

J. B. Stallo, The Concepts and Theories of Modern Physics. New York and London 1881. 4. Aufl. 1900. Im Text wird auf diese Ausgabe verwiesen. Deutsche Übersetzung von Kleinpeter. Die Begriffe und Sätze der modernen Physik, mit Vorwort von E. Mach. 1901. Recensiert von Kleinpeter in Vierteljahrsschr. für wiss. Phil. Bd. 25. S. 401. 1901. Stallo als Erkenntniskritiker.

Kroman, Unsere Naturerkenntnis. Preisschrift der Kopenhagener Akademie der Wissenschaften. 1881. Deutsche

Literaturverzeichnis.

Die Werke, die mir für die Geschichte der Metageometrie wichtig erschienen, sind auf S. 1, Anm. 1 angegeben. Die wichtigsten mathematischen Original-Arbeiten, auf denen die nichteuklidischen Geometrien beruhen, sind im Texte angeführt, die Zitate aus Kant nach Kehrbach, Reclam Ausgabe.

Folgende Autoren haben die Metageometrie von Seiten der Philosophie verteidigt:

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Vorgetragen am 10. Juni 1854. Gedr. Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen. Bd. XIII. 1867. Und in ges. Werken, Herausg. Dedekind, Leipzig 1876. S. 254–268.

Helmholtz, 1. Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Vorgetragen in der Versammlung Deutsch. Naturforscher und Ärzte in Heidelberg am 22. Mai 1868. Gedr. in Verh. der natur-historisch-medizinischen Gesellschaft. Bd. IV. S. 197—202. 1868. Auch in: Gesammelte wiss. Abhandlungen, Leipzig 1883. S. 610 - 616.

—,— 2. Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Nachrichten der Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. 3. Juni 1868. Nr. 9. S. 193—221. Auch in Ges. wiss. Abh. S. 618—639.

—,— 3. Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorgetragen im Dozenten-Verein zu Heidelberg 1869. (70 ?). Vorträge und Reden, Bd. II. Nr. 1.

Helmholtz, 4. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms. Mind, Bd. I. S. 301—321. July 1876.

—,— 5. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms. 2. Aufsatz. Mind, Bd. III. S. 212—225. April 1878. Deutsch in Ges. wiss. Abh. II. Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. S. 640—660.

—,— 6. Die Tatsachen in den Wahrnehmungen. Rede, gehalten zur Stiftungsfeier der Berliner Universität. 3. August 1878. Erst veröffentl. als Programm der Universität und dann mit drei Beilagen im Verlag Hirschwald. Auch in: Vorträge und Reden, 5 Auflage. S. 213 bis 247. Beilagen S. 387—406.

Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Annalen, Bd. IV, 1871. Bd. VI, 1873. Bd. VII, 1874. Bd. 37, 1890. Vorlesungen, gehalten während des Wintersemesters 1889—90 und während des Sommersemesters 1890, Über Nicht-Euklidische Geometrie. Göttingen 1893.

Erdmann, Die Axiome der Geometrie. Leipzig 1877.

Otto Liebmann, Raumcharakteristik und Raumdeduktion. Vierteljahrsschr. f. wiss. Phil. Bd. I. S. 201 ff. 1877. Zur Analysis der Wirklichkeit, II. Aufl. 1880. III. Aufl. 1900.

Calinon, Les espaces géométriques, Revue phil. Juni 1889. S. 594, und andere Aufsätze.

W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, 2 Bände. Paderborn 1893/98.

B. Russell, The Foundations of Geometry. Cambridge 1897. The Principles of Mathematics. Cambridge 1903. Recensiert Revue Phil. de la France, Bd. 57. S. 288. 1904.

F. Medicus, Kants transscendentale Ästhetik und die nichteuklidische Geometrie. Dissertation. Jena 1898.

Kleinpeter, Entwicklung des Raum- und Zeitbegriffs in der neueren Mathematik und Mechanik. Arch. f. syst. Phil. Bd. IV. S. 32 ff. 1898. Die Erkenntnistheorie der Naturforschung der Gegenwart. Leipzig 1905.